**UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**Faculdade de Ciências**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

# INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

**Armando Machado**

Versão mais completa
destinada aos professores

2002

REANIMAT

Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática
no Ensino Secundário

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

# 1. Introdução

A actividade Matemática, tanto ao nível relativamente elementar do Ensino Básico e Secundário como a níveis mais profissionais, tem um carácter multifacetado, que inclui, por exemplo:

a) A utilização e construção de algoritmos para resolver, de modo sistemático, questões com que nos deparamos com frequência;

b) A formação das imagens mentais fecundas em que se apoia a intuição, que possibilita o ataque a problemas novos;

c) A capacidade de reconhecer semelhanças em situações aparentemente diferentes, que permitam tratá-las de modo unificado;

d) A realização de experiências que permitam formular conjecturas a serem verificadas posteriormente.

Muitos dos aspectos atrás referidos são compartilhados com outras actividades do espírito humano, em particular com as ciências com carácter mais experimental. Há, no entanto, um aspecto que, coexistindo com os restantes e não substituindo-os, é especialmente distintivo da actividade Matemática, a capacidade de clarificar conceitos e a de argumentar, isto é, a de adquirir (e transmitir) certezas a propósito da validade de certas afirmações, a partir do reconhecimento da validade de outras, normalmente mais simples. Essa capacidade de clarificar conceitos (apresentar definições) e de argumentar (exibir demonstrações), capacidade a que, de forma simplificada, daremos o nome de raciocínio lógico, ou raciocínio matemático, parece ter surgido historicamente, de forma sistemática, há mais de dois mil anos com a Escola dos geómetras gregos e desenvolve-se gradualmente ao longo da vida de muitos de nós. No entanto, num número infelizmente grande de casos, constata-se o aparecimento de bloqueamentos que impedem o estudante de raciocinar correctamente em termos lógicos, mesmo em situações por muitos consideradas como extremamente simples.

Se mesmo para um estudante que foi adquirindo de forma satisfatória a capacidade de raciocinar em termos matemáticos pode ser culturalmente interessante uma reflexão sobre o modo como o raciocínio se desenvolve, pensamos que uma tal reflexão, se feita de um modo equilibrado, pode contribuir para ajudar o estudante com dificuldades em pensar matematicamente.

É uma tentativa para estimular uma reflexão sobre as bases do Raciocínio Matemático aquilo que vamos desenvolver em seguida. Trata-se de um texto com carácter introdutório, sem preocupações de carácter formal, que se justificariam, por exemplo, num curso de nível universitário. Trata-se também de um texto que contém aqui e ali algumas afirmações que, de um ponto de vista estrito, podem ser consideradas como não totalmente correctas. Pareceu-nos no entanto o compromisso possível para evitar entrar em detalhes que são delicados e incompatíveis com a maturidade matemática do estudante nesta fase. Mais do que uma exposição completa dos assuntos, o que pretendemos é dar um empurrão no bom sentido.

## 2. As expressões da linguagem matemática Os conectivos lógicos

As expressões que a linguagem matemática utiliza não são essencialmente muito diferentes daquelas que utilizamos no dia a dia, quando falamos dos mais variados assuntos. Desse ponto de vista poderíamos ser levados a pensar que o estudo dessas expressões se reduziria àquilo a que damos usualmente o nome de Gramática. De facto não é isso exactamente o que se passa: Por um lado, e como será exemplificado adiante, existem por vezes pequenas diferenças entre o modo como uma frase é interpretada num contexto matemático e o significado que daríamos a uma frase análoga num contexto corrente; por outro lado o tipo de análise que interessa fazer para perceber o significado das expressões utilizadas em Matemática não é aquele que é feito usualmente no estudo da Gramática. Vamos iniciar em seguida uma análise das expressões da linguagem matemática que se revela especialmente adaptada à compreensão desta.

Há essencialmente dois tipos de expressões com significado matemático, cada um dos quais, como estudaremos mais tarde, admite uma variante.

> Chama-se *termo*, ou *designação*, a uma expressão cujo papel é nomear, ou designar alguma coisa.

Apresentamos a seguir algumas expressões que podem aparecer em contextos matemáticos e que são termos.

- $4$
- o mais pequeno número primo maior que $1000$
- a soma de 4 parcelas iguais a 7
- $2 \times (7 - 5)$
- o número real positivo cujo quadrado é dois
- a recta que passa pelo ponto $P$ e é paralela à recta $r$

(no último exemplo supomos naturalmente que, no contexto em questão, sabemos o que são o ponto $P$ e a recta $r$). O estudante não terá dificuldade em multiplicar os exemplos anteriores nem em construir exemplos de termos que intervêm em contextos não matemáticos.

> Chama-se *proposição* a uma expressão que traduz uma afirmação e à qual se pode associar um dos *valores de verdade* “verdadeiro” ou “falso”.

Repare-se que, ao classificarmos uma expressão como sendo uma proposição, não estamos de modo nenhum a insinuar que ela é verdadeira. Como exemplos de proposições que podem aparecer em contextos matemáticos temos:

- $4+5=9$
- A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$
- Qualquer número diferente de $0$ tem um quadrado maior que $0$
- $9$ é um número primo
- $\sqrt{2}+\sqrt{8}<\sqrt{18}$ ou $\sqrt{18}<\sqrt{2}+\sqrt{8}$
- Existe um número natural cujo dobro é $5$

(repare-se que os três primeiros exemplos são proposições verdadeiras e os três últimos são proposições falsas). Mais uma vez, o estudante não terá dificuldade em encontrar outros exemplos de proposição tanto em contextos matemáticos como noutros contextos.

Apesar de, como já referimos, uma proposição poder ser verdadeira ou falsa, há muitas situações em que ao enunciarmos uma proposição estamos a afirmar que ela é verdadeira:

Vamos chamar *asserção* a uma proposição que foi enunciada com o objectivo de a identificar como proposição verdadeira.[1]

A maioria das proposições que encontramos em textos de Matemática são asserções dos seus autores. No entanto, quando em provas de "escolha múltipla" se apresentam várias proposições e se questiona sobre qual delas é verdadeira, essas proposições não são evidentemente asserções.

★ ★ ★ ★

Muitas das proposições que encontramos na prática podem ser consideradas como construídas a partir de uma, ou mais, proposições mais simples por utilização de uns instrumentos lógicos, a que se costuma dar o nome de *conectivos*, de tal modo que o valor de verdade da proposição inicial fica determinado pelos valores de verdade da, ou das, proposições mais simples que contribuiram para a sua formação. Vamos começar por examinar três desses conectivos, a *negação*, a *conjunção* e a *disjunção*, deixando para mais tarde dois outros conectivos importantes, a *implicação* e a *equivalência*, cuja compreensão é, de início, um pouco mais delicada.

A *negação* de uma proposição é uma nova proposição que é verdadeira se a primeira for falsa e é falsa se a primeira for verdadeira.

A negação aparece muitas vezes na linguagem corrente através da utilização da palavra "não", embora por vezes ela esteja disfarçada sobre várias formas, especialmente quando combinada com outros instrumentos lógicos (pensar, por

[1]Em rigor o conceito de asserção não pertence ao campo da Lógica, tendo apenas a ver com a intenção do autor da proposição em análise. De qualquer modo, parece cómodo utilizá-la numa exposição introdutória sobre a Lógica.

exemplo, nas palavras “nunca”, ou “nem”, ou em expressões menos formais como “é mentira que”[2]). O importante é aprendermos a reconhecer na linguagem corrente a actuação deste conectivo e isso é uma coisa que, na prática, não costuma oferecer dificuldades.

Por exemplo: A proposição “7 não é maior que $2+3$”[3], que é falsa, é a negação da proposição “7 é maior que $2+3$”, que é verdadeira; a proposição “não há triângulos com dois ângulos rectos”, que é verdadeira, é a negação da proposição “há triângulos com dois ângulos rectos”, que é falsa. Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a negação de outra, escrevemo-la antecedendo esta última do símbolo de negação $\boxed{\sim}$, depois de, se isso for mais claro, a envolver entre parênteses (alguns autores preferem o símbolo $\boxed{\neg}$). As duas negações atrás referidas seriam assim escritas na forma

$\sim$ (7 é maior que $2+3$)
$\sim$ (há triângulos com dois ângulos rectos).

Não se fique, no entanto, com a ideia de que a utilização do símbolo lógico de negação seja preferível à utilização normal da língua portuguesa, mesmo quando se está a trabalhar num contexto matemático: A versão mais simbólica justifica-se, normalmente, apenas quando se quer sublinhar a análise da proposição enquanto negação.

Uma propriedade muito simples da negação é a chamada **lei da dupla negação**: Afirmar que a negação da negação de uma proposição é verdadeira é exactamente o mesmo que afirmar que a proposição original é verdadeira.

Por exemplo, escrevendo, como é usual, na forma “$4 \neq 3$” a negação da proposição “$4 = 3$”, a proposição “ $\sim (4 \neq 3)$” tem o mesmo valor de verdade que “$4 = 3$”.

O segundo conectivo lógico que vamos examinar é a conjunção.

> A *conjunção* de duas proposições é uma nova proposição que é verdadeira se as duas primeiras o forem e que é falsa, quer no caso em que as duas primeiras são falsas, quer no caso em que uma delas é verdadeira e a outra é falsa.

A conjunção aparece muitas vezes na linguagem corrente através da utilização da palavra “e”, embora por vezes ela esteja disfarçada sob outras formas. Por exemplo: A proposição “$7 > 5$ e $5 > 3$”, que é verdadeira, é a conjunção das duas proposições verdadeiras “$7 > 5$” e “$5 > 3$”; a proposição “quer 11, quer 111, são números primos” é a conjunção das proposições “11 é um número primo” e “111 é um número primo”, a primeira verdadeira e a segunda falsa,

[2]Não só menos formais como não totalmente correctas do ponto de vista lógico. É, no entanto, talvez cedo para poder explicar os eventuais problemas desta formulação, que aliás também existiriam com formulações mais formais do tipo “não é verdade que”.

[3]Com frequência colocamos entre aspas certas expressões da linguagem quando quisermos tornar claro que estamos a falar sobre essas expressões, e não sobre os objectos a que elas fazem referência.

pelo que aquela proposição é falsa; a proposição “nem $5$, nem $7$, são números primos” é a conjunção das proposições falsas “$5$ não é um número primo” e “$7$ não é um número primo” e é assim uma proposição falsa. Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a conjunção de outras duas, escrevemo-la colocando entre estas o símbolo de conjunção $\boxed{\wedge}$, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses. As três conjunções atrás referidas seriam assim escritas na forma

$$7 > 5 \wedge 5 > 3$$

(11 é um número primo) $\wedge$ (111 é um número primo)

(5 não é um número primo) $\wedge$ (7 não é um número primo)

e, no caso da última, podemos levar a análise mais longe e escrevê-la na forma

( $\sim$ (5 é um número primo)) $\wedge$ ( $\sim$ (7 é um número primo)).

Examinemos agora o terceiro conectivo, a disjunção.

> A *disjunção* de duas proposições é uma nova proposição que é falsa no caso em que as primeiras são ambas falsas e que é verdadeira, quer no caso em que uma das primeiras é verdadeira e a outra é falsa, quer naquele em que as duas primeiras são ambas verdadeiras.

A disjunção aparece frequentemente na linguagem corrente assinalada pela palavra “ou”. Por exemplo: A proposição “$7 > 5$ ou $3 > 4$” é a disjunção das proposições “$7 > 5$” e “$3 > 4$”, a primeira verdadeira e a segunda falsa, pelo que se trata de uma proposição verdadeira; a proposição “$1 > 1$ ou $0 > 0$” é a disjunção das duas proposições falsas “$1 > 1$” e “$0 > 0$” e é portanto falsa; a proposição “$4 = 4$ ou $1 \neq 0$” é a disjunção das duas proposições verdadeiras “$4 = 4$” e “$1 \neq 0$”, sendo assim uma proposição verdadeira. Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a disjunção de outras duas, escrevemo-la colocando entre estas o símbolo de disjunção $\boxed{\vee}$, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses. As três disjunções atrás referidas seriam assim escritas na forma

$$7 > 5 \vee 3 > 4$$
$$1 > 1 \vee 0 > 0$$
$$4 = 4 \vee 1 \neq 0.$$

Observe-se que, tal como acontecia com os outros conectivos, nem sempre a palavra “ou” aparece explicitada numa disjunção enunciada em linguagem corrente. Por exemplo, se pensarmos um pouco, concluímos que a proposição “um dos números $2^3 + 1$ e $2^3 - 1$ é primo” pode ser analisada na forma

($2^3 + 1$ é primo) $\vee$ ($2^3 - 1$ é primo).

A disjunção, quando utilizada na linguagem corrente e num contexto não matemático, tem por vezes uma interpretação diferente daquela que apontámos atrás. O que se passa é que há frases disjuntivas que se pretende considerar como falsas quando as duas que contribuem para a sua formação forem verdadeiras (costuma-se então dizer que se está em presença de uma *disjunção exclusiva*). Como exemplo de frase deste tipo, podemos apontar "ou vais à praia ou vês o jogo", em que está implícita a necessidade de uma opção. Num contexto matemático, que é o que nos interessa aqui, a disjunção exclusiva não é praticamente utilizada, pelo que será cómodo considerar que o significado da disjunção é sempre aquele que apontámos inicialmente.

Reparemos que, tal como referimos ao explicar o significado da disjunção, uma disjunção de duas proposições é falsa exactamente quando as duas proposições forem falsas, ou seja quando as negações das duas proposições forem ambas verdadeiras. Dito de outro modo,

> Dizer que a **negação da disjunção** de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que a **conjunção das negações** das duas proposições é verdadeira.

Por exemplo, dizer que a proposição

$$\sim (\pi = 3 \vee \pi = 4)$$

é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição

$$( \sim \pi = 3) \wedge ( \sim \pi = 4),$$

a qual é escrita habitualmente na forma "$\pi \neq 3 \wedge \pi \neq 4$".

Por razões análogas se constata que

> Dizer que a **negação da conjunção** de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que a **disjunção das negações** das duas proposições é verdadeira.

Por exemplo, dizer que é falsa a afirmação "9 é primo **e** ímpar" (ou seja, que a sua negação é verdadeira) é o mesmo que dizer a afirmação "9 não é primo **ou** 9 não é ímpar" é verdadeira.

Aos dois factos assinalados atrás é costume dar o nome de **primeiras leis de de Morgan**[4]. É comum uma pessoa menos atenta cometer o erro de negar uma conjunção ou disjunção sem reparar que tem de trocar o conectivo.

Reparemos enfim que, tanto a conjunção como a disjunção, que referimos envolverem duas proposições, podem ser naturalmente estendidas ao caso em que partimos de três ou mais: A conjunção de várias proposições vai, tal como no caso de duas, ser uma nova proposição que é verdadeira quando todas o forem e vai ser falsa em todos os outros casos (ou seja, quando pelo menos uma for falsa); a disjunção das mesmas proposições vai ser falsa quando todas forem falsas e vai ser verdadeira em todos os outros casos (ou seja, quando pelo menos

[4] O "de" não foi repetido por engano: O nome pelo qual é conhecido o matemático é "de Morgan".

uma for verdadeira).

★ ★ ★ ★

Antes de passarmos a examinar os restantes conectivos lógicos será cómodo falarmos da variante das proposições que referimos no início. Pensemos numa afirmação do tipo "um número é maior que 5" ou "$x^2 + x - 2 = 0$". Cada uma delas, por si só, não é verdadeira nem falsa, porque não sabemos a que nos estamos a referir, no primeiro caso quando dizemos "um número" e, no segundo, quando escrevemos "$x$". No entanto, a primeira transforma-se numa proposição quando substituirmos "um número" por um termo, como 7 ou $2+2$ (no primeiro caso, ficamos com a proposição verdadeira "7 é maior que 5" e, no segundo, com a proposição falsa "$2+2$ é maior que 5") e a segunda transforma-se numa proposição quando subsituímos "$x$" por um termo como "1" ou "2" (no primeiro caso, ficamos com a proposição verdadeira "$1^2 + 1 - 2 = 0$" e, no segundo, com a proposição falsa "$2^2 + 2 - 2 = 0$"). A uma expressão como as anteriores é costume dar o nome de *expressão proposicional* ou de *condição*, havendo também contextos, como o da segunda, em que se usa o nome alternativo de *equação*; à unidade "um número", no primeiro caso, e "$x$", no segundo, que se destina a ser substituída, costuma-se dar o nome de *variável* e a operação de substituir as variáveis por termos também costuma ser referida como "atribuir valores às variáveis". Em geral, podemos dizer:

Uma *expressão proposicional*, ou *condição*, é uma expressão com variáveis que se transforma numa proposição quando se substituem essas variáveis por termos convenientes.

Cada variável tem um *domínio* (normalmente implícito no contexto em que nos situamos), isto é, um certo conjunto de objectos ao qual a variável se refere, e, para substituir essa variável por um termo, é necessário assegurarmo-nos de que esse termo designa um objecto desse conjunto. Por exemplo, quando falamos da expressão proposicional $x^2 + x - 2 = 0$, $x$ será provavelmente uma *variável real*, isto é, uma variável destinada a ser substituída por um termo que designe um número real; não fará qualquer sentido substituir $x$ por um termo que designe, por exemplo, uma recta dum plano.

Uma expressão proposicional pode conter uma ou mais variáveis e cada variável pode aparecer uma ou mais vezes. As substituições de variáveis por termos devem ser feitas de acordo com regras que o estudante decerto já encontrou e que não terá dificuldade em aplicar. Relembrando:

Se uma mesma variável aparecer mais que uma vez, ela deve ser substituída todas as vezes pelo mesmo termo; pelo contrário, diferentes variáveis podem ser substituídas pelo mesmo ou por diferentes termos.

Aquilo que acabamos de dizer relativamente às proposições pode ser dito, de modo análogo, relativamente aos termos. Expressões como "$x^2 + x - y$" contêm variáveis e transformam-se em termos quando se substituem essas variáveis por termos.

> Uma *expressão designatória* é uma expressão com variáveis que se transforma num termo quando se substituem essas variáveis por termos.

Voltando às expressões proposicionais, reparemos que os três conectivos que estudámos atrás, e que permitiam formar novas proposições a partir de proposições mais simples, vão permitir formar do mesmo modo novas expressões proposicionais a partir de expressões proposicionais mais simples. Por exemplo, partindo de expressões proposicionais como "$x$ é maior que 3" e "$x$ é menor que 5", podemos utilizando um ou mais conectivos, obter, entre outras, as expressões proposicionais

- $x$ é maior que $3$ e $x$ é menor que $5$
- $x$ é maior que $3$ ou $x$ é menor que $5$
- $x$ é maior que $3$ e $x$ não é menor que $5$.

Embora, como já referimos, uma expressão proposicional não seja, em geral, nem verdadeira nem falsa, só tomando um desses valores de verdade quando substituímos as variáveis por termos, há certas expressões proposicionais que têm a propriedade especial de se transformarem em proposições verdadeiras, quaisquer que sejam as substituições que se façam. É o que acontece, por exemplo, com as seguintes expressões proposicionais, com variável real:

- $x \geq 0 \vee x < 0$
- $x > 3 \vee x < 5$
- $x^2 + 1 > 0$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Às expressões proposicionais com esta propriedade dá-se o nome de *universais*.

> Uma *expressão proposicional universal* é uma expressão proposicional que se transforma numa proposição verdadeira, qualquer que seja o modo como substituímos as suas variáveis por termos.

Referimos atrás que uma asserção é uma proposição que é enunciado pelo seu autor como sendo verdadeira. De modo análogo, diremos que uma expressão proposicional é uma *asserção* se for enunciada pelo seu autor como sendo universal. Um grande número de expressões proposicionais que aparecem num texto matemático são de facto asserções. No entanto, quando falamos, por examplo, da equação $x^2 + x - 2 = 0$, não estamos, evidentemente, a fazer uma asserção.

Uma convenção útil para uma maior economia de linguagem é considerar que, quando falarmos em geral de expressões proposicionais, admitimos que estas possam ser também proposições, olhando assim para as proposições como sendo expressões proposicionais com $0$ variáveis. Dizer que uma proposição, enquanto expressão proposicional, é universal corresponde então a dizer que ela é verdadeira. Do mesmo modo, vamos considerar que os termos são expressões designatórias com $0$ variáveis.

★ ★ ★ ★

O contexto das expressões proposicionais permite explicar, de forma porventura mais clara, os dois conectivos que nos falta estudar. O primeiro desses conectivos é a implicação, que costuma aparecer na linguagem corrente, entre outras, nas formas "… implica …" ou "se …, então …". Como exemplos de asserções que fazem intervir a implicação, podemos apresentar

- Se um triângulo tem dois lados iguais, então os ângulos opostos são iguais
- Se $x \times y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$
- $x > 0$ e $y > z$ implica $x \times y > x \times z$.

Em cada um dos casos a expressão proposicional é construida a partir de outras duas, o *antecedente* e o *consequente*, e o que a asserção afirma é que, quaisquer valores atribuídos às variáveis que tornem o antecedente verdadeiro, também tornam o consequente verdadeiro (por exemplo, no terceiro caso assinalado acima, o antecedente é a expressão proposicional "$x > 0$ e $y > z$" e o consequente é "$x \times y > x \times z$"). Se a implicação, no contexto das asserções que envolvem expressões proposicionais com variáveis, é algo que estamos habituados a encontrar, talvez já não seja muito claro qual o significado a dar a uma implicação cujos antecedente e consequente sejam proposições. Por exemplo, o que significará "$2 > 0$ e $4 > 3$ implica $2 \times 4 > 2 \times 3$", ou "$2 > 0$ e $3 > 4$ implica $2 \times 3 > 2 \times 4$", ou "$-1 > 0$ e $3 > 4$ implica $(-1) \times 3 > (-1) \times 4$"? Apesar de estes significados não parecerem porventura muito claros, revelou-se útil, para poder encarar os diferentes tipos de asserções de um ponto de vista unificado, atribuir significado a expressões como aquelas com o objectivo de conseguir que as asserções válidas continuem a corresponder exactamente às expressões proposicionais universais. Se queremos que a asserção, que ninguém tem dúvidas em aceitar como válida, "$x > 0$ e $y > z$ implica $x \times y > x \times z$" fique uma expressão proposicional universal, não podemos deixar de aceitar como verdadeiras as três proposições

- $2 > 0$ e $4 > 3$ implica $2 \times 4 > 2 \times 3$
- $2 > 0$ e $3 > 4$ implica $2 \times 3 > 2 \times 4$
- $-1 > 0$ e $3 > 4$ implica $(-1) \times 3 > (-1) \times 4$,

que se obtêm daquela expressão proposicional atribuindo, de diferentes modos, valores às variáveis. Repare-se que no primeiro caso o antecedente "$2 > 0$ e $4 > 3$" e o consequente "$2 \times 4 > 2 \times 3$" são ambos verdadeiros, no segundo caso o antecedente e o consequente são ambos falsos e no terceiro caso o antecedente é falso e o consequente é verdadeiro. As considerações anteriores não explicam qual o valor de verdade que convém atribuir à implicação quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, mas é fácil de constatar que ela deve então ser considerada como falsa, o que está aliás de acordo com o modo usual de rebater uma asserção inválida como “Se $x > 1$, então $x > 5$”; se alguém nos fizesse essa asserção nós responderíamos: Nem pensar…; “$3 > 1$” é verdade e “$3 > 5$” é falsa (costuma-se dizer que a substituição de $x$ por 3 constitui um *contraexemplo*). Resumindo:

> A *implicação* entre duas proposições, uma primeira o *antecedente* e uma segunda o *consequente*, é uma nova proposição que é **verdadeira** nos casos em que
>
> - O antecedente é verdadeiro e o consequente é verdadeiro
> - O antecedente é falso e o consequente é verdadeiro
> - O antecedente é falso e o consequente é falso
>
> e é **falsa** no caso em que
>
> - O antecedente é verdadeiro e o consequente é falso

Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a implicação entre outras duas, escrevemo-la colocando o antecedente e o consequente, por esta ordem, separados pelo símbolo de implicação $\boxed{\Rightarrow}$, depois de, se isso for mais claro, os envolver entre parênteses. Do mesmo modo que a implicação colocada entre duas proposições dá origem a uma nova proposição, quando a colocamos entre duas expressões proposicionais, obtemos uma nova expressão proposicional e é fácil de constatar que, como era nosso objectivo, uma tal expressão proposicional é válida como asserção exactamente quando for uma expressão proposicional universal. Por exemplo, as três asserções com que iniciámos o estudo da implicação, podem ser analisadas na forma

- (dois lados de um triângulo são iguais) $\Rightarrow$ (os ângulos opostos são iguais)
- $x \times y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
- $(x > 0 \wedge y > z) \Rightarrow x \times y > x \times z$.

Reparando no modo como a implicação foi interpretada acima, constatamos que afirmar que a negação de uma implicação é verdadeira é o mesmo que afirmar que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso ou seja, dito de outro modo, que o antecedente e a negação do consequente são ambos verdadeiros. Podemos assim enunciar a seguinte

> **Regra da negação de uma implicação**: O valor de verdade da negação de uma implicação é o mesmo que o da conjunção entre o antecedente e a negação do consequente.

Por exemplo, afirmar a negação de “se choveu, então fui ao cinema” é o mesmo que afirmar que “choveu e não fui ao cinema” e afirmar a negação de “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” é o mesmo que afirmar “$x^2 = 1 \wedge x \neq 1$”.

A propósito do último exemplo que apresentámos é interessante reparar que, ao contrário do que acontece no caso das proposições, em que negar a verdade duma proposição é o mesmo que afirmar a verdade da sua negação, negar o facto de uma expressão proposicional ser universal não é o mesmo que afirmar que a sua negação é universal. No exemplo em questão, "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" não é universal, como se reconhece substituindo $x$ por $-1$, e a sua negação, que afirma o mesmo que "$x^2 = 1 \wedge x \neq 1$", também não é universal, como se reconhece substituindo, por exemplo, $x$ por $0$.

A cada implicação entre duas proposições (ou expressões proposicionais) é costume associar outras três implicações:

A *implicação recíproca* é aquela cujo antecedente é o consequente da primeira e cujo consequente é o antecedente da primeira. Por exemplo, a implicação recíproca de "se choveu, então fui ao cinema" é "se fui ao cinema então choveu" e a implicação recíproca de "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" é "$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$". Repare-se que uma implicação entre duas proposições e a sua recíproca não têm que ter o mesmo valor de verdade; por exemplo, quando se substitui $x$ por $-1$, "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" é falsa e "$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$" é verdadeira.

A *implicação contrária* é aquela cujo antecedente é a negação do antecedente da primeira e cujo consequente é a negação do consequente da primeira. Por exemplo, a implicação contrária de "se choveu, então fui ao cinema" é "se não choveu, então não fui ao cinema" e a implicação contrária de "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" é "$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$". Repare-se que uma implicação entre duas proposições e a sua contrária não têm que ter o mesmo valor de verdade; por exemplo, quando se substitui $x$ por $-1$, "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" é falsa e "$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$" é verdadeira.

A *implicação contrarrecíproca* é aquela cujo antecedente é a negação do consequente da primeira e cujo consequente é a negação do antecedente da primeira, por outras palavras, é a contrária da recíproca da primeira[5]. Por exemplo, a implicação contra-recíproca de "se choveu, então fui ao cinema" é "se não fui ao cinema então não choveu" e a implicação contra-recíproca de "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" é "$x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$". A implicação contra-recíproca é especialmente importante pelo facto seguinte, que resulta simplesmente de uma implicação ser falsa quando, e só quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, ou seja, quando, e só quando, a negação do consequente é verdadeira e a negação do antecedente é falsa:

**Regra da passagem ao contrarrecíproco:** Uma implicação entre duas proposições e a implicação contrarecíproca têm sempre o mesmo valor de verdade.[6]

O último conectivo que nos falta referir, a equivalência, pode ser agora examinado de modo rápido, na medida em que o seu papel apresenta semelhanças com o da implicação.

[5]Também é a recíproca da contrária da primeira…

[6]Analogamente se constata que a implicação recíproca e a implicação contrária têm também sempre o mesmo valor de verdade (mas não o mesmo que a implicação de partida).

A *equivalência* entre duas proposições é uma nova proposição que é verdadeira, quer no caso em que as primeiras são ambas verdadeiras, quer no caso em que estas são ambas falsas, e que é falsa no caso em que uma das primeiras é verdadeira e a outra é falsa.

Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a equivalência entre outras duas, escrevemo-la separando estas pelo símbolo de equivalência $\boxed{\Leftrightarrow}$, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses. Do mesmo modo que a equivalência colocada entre duas proposições dá origem a uma nova proposição, quando a colocamos entre duas expressões proposicionais, obtemos uma nova expressão proposicional e é nessa forma que a equivalência aparece utilizada com mais frequência na prática. Em linguagem comum a equivalência é frequentemente assinalada, entre outros modos, utilizando palavras como "é equivalente", "se, e só se," ou "é condição necessária e suficiente". Por exemplo o carácter de equivalência das asserções

• Um triângulo é equilátero se, e só se, é equiângulo
• Uma condição necessária e suficiente para que $x \times y = 0$ é que $x = 0$ ou $y = 0$

fica sublinhado se as escrevermos na forma

• (o triângulo é equilátero) $\Leftrightarrow$ (o triângulo é equiângulo)
• $x \times y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$.

Repare-se que, comparando o modo como se determina se uma equivalência de duas proposições é verdadeira ou falsa com o que se faz no caso duma implicação, constata-se facilmente que

Dizer que a equivalência de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que são verdadeiras a implicação que se obtém tomando uma das proposições como antecedente e a outra como consequente e a recíproca desta[7].

Por exemplo, dizer que "$x \times y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$" é universal é o mesmo que dizer que são universais as duas implicações

$$x \times y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0) \qquad (x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow x \times y = 0.$$

## Exercícios

1) Para cada uma expressões proposicionais seguintes, analisá-la até onde for possível em termos da sua formação a partir de expressões mais simples, por

[7]Ou, alternativamente a primeira implicação e a sua contrária (lembrar o que se disse na nota de pé de página número 6).

utilização dos conectivos lógicos. Descrever essa análise utilizando os símbolos lógicos para os conectivos e colocar parênteses, nos casos em que isso seja útil para uma melhor legibilidade ou para evitar ambiguidades.

a) 3 é um divisor comum de 9 e 12.

b) 9 não é primo nem par.

c) Ou $x^2 + y^2 > 0$, ou tem-se simultaneamente $x = 0$ e $y = 0$.

d) Ou $n = 1$, ou $n$ não é divisor de 9, ou $n$ não é divisor de 10.

e) O número $x$ é maior que pelo menos um dos números $y$ e $z$.

f) $x > 3$ ou $x < 5$.

g) Os números $x$ e $-x$ são ambos menores que $y$.

h) $n$ é múltiplo de 5 e de 7.

i) Nem $x$ nem $y$ são números positivos.

j) Se $x \neq y$ e $x$ não é menor que $y$, então $y$ é menor que $x$.

l) Se $xy = 1$ e $x \neq y$, então $x < 1$ ou $y < 1$.

m) $3x = 6$ quando $2x = 4$.

n) $x^2 = 4$ se, e só se $x = 2$.

o) Quer no caso em que $x < 0$, quer naquele em que $x > 0$, tem-se $x^2 > 0$.

p) É condição necessária e suficiente para que $xy < xz$ que seja $x < 0$ e $y < z$.

q) Se $x$ é simultaneamente maior e menor que 0, então $x^2$ é menor que 0.

2) Verificar quais das alíneas do exercício precedente são asserções válidas, isto é, são proposições verdadeiras ou expressões proposicionais universais (consideramos $n$ como variável natural e $x$, $y$ e $z$ como variáveis reais). No caso das expressões proposicionais que não sejam universais, apresentar contraexemplos, isto é, substituições das variáveis que transformem as expressões proposicionais em proposições falsas.

3) Um estudante menos atento utilizou os conectivos lógicos de forma incorrecta para analisar certas expressões proposicionais em linguagem corrente. Descobrir quais seriam essas expressões e explicitar uma análise correcta.

a) $x \sim\ < y$.

b) $0 < x \wedge y$.

c) $x \vee y$ é positivo.

d) $x > 0\ \sim\ \Rightarrow x > 1$.

e) O professor $\Rightarrow$ com a Marta $\wedge$ com o João.

## 3. As expressões da linguagem matemática Quantificadores

Consideremos, por exemplo, a proposição “O quadrado de qualquer número real é maior ou igual a 0”. Trata-se de uma expressão da linguagem matemática que se sente claramente que pode ser considerada como construída a partir de algo mais simples, mas constata-se que não são os conectivos que contribuem para essa formação. A proposição anterior corresponde a afirmar que a expressão proposicional $x^2 \geq 0$ é universal e dizemos que a proposição é obtida a partir da expressão proposicional utilizando o quantificador universal.

O *quantificador universal* é um instrumento lógico que transforma uma expressão proposicional com uma variável numa proposição, a qual é verdadeira se a expressão proposicional for universal e é falsa se a expressão proposicional não for universal, ou seja, se houver pelo menos uma substituição da variável que conduza a uma proposição falsa.

O quantificador universal aparece na liguagem corrente associado com frequência a palavras como "qualquer que seja", "para todo", "todos", "cada", "sempre", etc… Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador universal, enunciamo-la antecedendo a expressão proposicional de partida do símbolo $\boxed{\forall}$ acompanhado, usualmente por baixo ou em índice, da variável que figura nessa expressão e englobando eventualmente entre parênteses a expressão proposicional, no caso em que isso possa contribuir para uma melhor clareza ou para evitar ambiguidades. A proposição que nos serviu de exemplo seria assim enunciada

$$\underset{x}{\forall}\,(x^2 \geq 0) \quad \text{ou} \quad \forall_x\,(x^2 \geq 0)$$

ou, não havendo perigo de confusão,

$$\underset{x}{\forall}\,x^2 \geq 0 \quad \text{ou} \quad \forall_x\,x^2 \geq 0.$$

Está naturalmente implícito que $x$ é considerado como uma variável real. Na proposição obtida é costume dizer que $x$ é uma *variável muda* para lembrar que, a expressão final é uma proposição e não uma expressão proposicional em que $x$ seja candidato a ser substituído (por oposição é costume dizer que as variáveis candidatas a ser substituídas nas expressões proposicionais são *variáveis livres*; quando falamos simplesmente de variáveis a figurar numa expressão, está subentendido que nos referimos apenas às variáveis livres). Repare-se também que a mesma proposição pode ser escrita utilizando outra variável muda em vez de $x$: Tanto faz escrever "$\forall_x\,x^2 \geq 0$" como "$\forall_y\,y^2 \geq 0$".

Tal como já referimos a propósito dos conectivos, não se deve ficar com a ideia que na linguagem matemática corrente se deva utilizar o símbolo "$\forall$" em vez das formulações usuais. A utilização do símbolo "$\forall$" justifica-se normalmente apenas em ocasiões especiais, como nos casos em que se pretende fazer uma análise das expressões do ponto de vista lógico, nos casos em que, por razões de aspecto gráfico, se impõe um enunciado mais curto ou nos casos em que, pela sua complexidade, a linguagem corrente corra o risco de ser ambígua.

Como segundo exemplo de proposição em que intervém o quantificador universal, examinemos o enunciado "o quadrado de qualquer número real é maior que 2 ou menor que 2”, que pode ser escrito na forma simbólica

$$\underset{x}{\forall}\,(x^2 > 2 \,\vee\, x^2 < 2).$$

Ao contrário do que acontecia no primeiro exemplo, esta proposição é falsa, uma vez que a expressão proposicional “$x^2 > 2 \vee x^2 < 2$” não é universal. Repare-se que, para constatar que esta expressão proposicional não é universal basta encontrar um contraexemplo, isto é, uma subsituição da variável $x$ que a transforme numa proposição falsa; neste caso isso acontece quando substituirmos $x$ pelo termo $\sqrt{2}$, substituição que nos conduz à proposição falsa

$$(\sqrt{2})^2 > 2 \vee (\sqrt{2})^2 < 2.$$

O exemplo anterior serve também para sublinhar a diferença metodológica entre a Matemática e as ciências experimentais: No quadro duma ciência experimental a expressão “$x^2 > 2 \vee x^2 < 2$” seria facilmente considerada como válida, depois de se efectuar um número suficientemente grande de experiências (o estudante poderá fazer várias experiências com a máquina de calcular e compreenderá o que queremos dizer).

Uma questão que o estudante poderia talvez levantar neste momento diz respeito à utilidade do quantificador universal. Se o nosso objectivo fundamental é podermos enunciar asserções, isto é, expressões proposicionais universais e, em particular, proposições verdadeiras, qual o interesse de enunciar, por exemplo,

$$\underset{x}{\forall}\,(x < 0 \vee x > 2)$$

se, ao enunciarmos simplesmente

$$x < 0 \vee x > 2$$

estamos a afirmar exactamente o mesmo?[8] A resposta é que há várias situações em que o primeiro enunciado não pode ser substituído pelo segundo. Uma situação típica é aquela em que pretendemos afirmar que a expressão proposicional “$x < 0 \vee x > 2$” não é universal. Esta nossa asserção, verdadeira, como nos convencemos se substituirmos $x$ por 1, pode ser enunciada na forma

$$\sim \underset{x}{\forall}\,(x < 0 \vee x > 2)$$

mas não na forma “$\sim (x < 0 \vee x > 2)$”, uma vez que esta expressào proposicional também não é universal, como reconhecemos se substituirmos $x$ por 3. Situações do mesmo tipo aparecem quando os quantificadores universais são aplicados a expressões proposicionais combinadas com outros conectivos. Por exemplo,

[8]Neste caso, nenhuma delas é válida como asserção, a primeira por não ser verdadeira e a segunda por não ser universal.

$$x \geq 0 \vee x \leq 0$$

é uma asserção válida (é uma expressão proposicional universal) mas

$$(\underset{x}{\forall}\, x \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x \leq 0)$$

já não o é (é uma proposição falsa, enquanto disjunção de duas proposições falsas).

★ ★ ★ ★

O segundo quantificador que vamos examinar é o quantificador existencial.

> O *quantificador existencial* é um instrumento lógico que transforma uma expressão proposicional com uma variável numa proposição, que é verdadeira se houver pelo menos uma substituição da variável que conduza a uma proposição verdadeira e que é falsa caso contrário, isto é, se qualquer substituição conduzir a uma proposição falsa.

O quantificador existencial aparece na liguagem corrente associado com frequência a palavras como "existe" ou "há". Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador existencial, enunciamo-la antecedendo a expressão proposicional de partida do símbolo $\boxed{\exists}$ acompanhado, usualmente por baixo ou em índice, da variável que figura nessa expressão e englobando eventualmente entre parênteses a expressão proposicional, como acontecia anteriormente. Por exemplo, as três proposições

- Há um número real cujo cubo é 8
- Existe $x$ tal que $x^2 < x$
- Há um número natural cujo quadrado é 5 ou cujo cubo é 7

podem ser escritas na forma

- $\underset{x}{\exists}\, x^3 = 8$
- $\underset{x}{\exists}\, x^2 < x$
- $\underset{n}{\exists}\, (n^2 = 5 \vee n^3 = 7)$.

Reparemos que as duas primeiras são proposições verdadeiras (as substituições de $x$ por 2, no primeiro caso, e de $x$ por $\frac{1}{2}$, no segundo, servem para nos convencer desse facto) mas a terceira proposição é falsa.

Cabe aqui fazer uma observação sobre uma diferença importante de interpretação de certas proposições existenciais em contextos matemáticos, relativamente à interpretação de proposições do mesmo tipo noutros contextos. Referimo-nos àquelas em que é utilizado o plural numa afirmação de existência. Essa utilização, num contexto matemático, deve ser considerada com uma figura de estilo irrelevante do ponto de vista lógico. Mais concretamente, uma proposição como "Há números cujo cubo é 8" é considerada como significando "$\underset{x}{\exists}\, x^3 = 8$", e portanto como verdadeira, isto apesar de 2 ser o único número real cujo cubo é 8.[9]

Reparemos que, de acordo com a interpretação que demos do quantificador existencial, dizer que uma proposição obtida a partir duma expressão proposicional por meio desse quantificador é falsa é o mesmo que dizer que, se substituirmos a variável por um termo arbitrário, obtemos uma proposição falsa, o que é o mesmo que dizer que a negação da expressão proposicional é universal. Concluímos assim que:

> Dizer que a **negação** de uma proposição obtida através da aplicação do **quantificador existencial** a uma expressão proposicional é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição obtida aplicando o **quantificador universal** à **negação** da expressão proposicional.

Por exemplo, dizer que "não é verdade que existam números naturais cujo dobro é 5" é o mesmo que dizer que "o dobro de qualquer número natural é diferente de 5".

Analogamente,

> Dizer que a **negação** de uma proposição obtida através da aplicação do **quantificador universal** a uma expressão proposicional é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição obtida aplicando o **quantificador existencial** à **negação** da expressão proposicional.

Por exemplo, dizer que "não é verdade que todos os homens são mortais" é o mesmo que dizer que "existe um homem que não é mortal".

Aos dois factos assinalados atrás é costume dar o nome de **segundas leis de de Morgan**[10]. É comum uma pessoa menos atenta cometer o erro de negar uma quantificação universal ou existencial sem reparar que tem de trocar o quantificador.

Note-se que não há inconveniente em considerar a quantificação universal ou existencial simultaneamente em mais que uma variável, tal como acontece com as proposições

- Quaisquer que sejam $x$ e $y$, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- Existem reais $x$ e $y$ tais que $x+y=3$ e $x-y=1$,

que podem ser analisadas na forma

---

[9]Pelo contrário, num contexto não matemático, se alguém se atrevesse a dizer, por exemplo, "Há papas a viver no Vaticano", arricava-se a ouvir a resposta "Não há nada… só há um".

[10]O estudante possivelmente já sentiu alguma analogia entre a conjunção e o quantificador universal, por um lado, e entre a disjunção e o quantificador existencial, por outro.

- $\underset{x,y}{\forall}\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $\underset{x,y}{\exists}\ (x+y = 3 \ \wedge \ x-y = 1)$

e cuja interpretação é aquela que se espera.[11]

Para além da quantificação simultânea em todas as variáveis, há também situações em que é importante quantificar apenas em relação a algumas das variáveis, deixando as restantes variáveis livres. É o que acontece, por exemplo, com a expressão

Qualquer que seja $x$, $x^2 > y$,

que deve ser considerada como uma expressão proposicional com a única variável $y$ ($x$, enquanto variável muda, não deve ser considerado como variável na expressão final). Quando substituímos a variável $y$ pelo termo $4$, obtemos a proposição falsa

Qualquer que seja $x$, $x^2 > 4$

(pensar na substituição de $x$ por 1) e quando substituímos $y$ pelo termo $-1$, obtemos a proposição verdadeira

Qualquer que seja $x$, $x^2 > -1$.

★ ★ ★ ★

Vamos agora examinar como podemos analisar expressões em que a quantificação aparece com domínio restringido. Estamos a pensar, por exemplo, em proposições como

- Todos os múltiplos de 6 são pares
- Há números pares que são múltiplos de 3.

Uma solução possível para o nosso problema é considerar, no primeiro caso, uma variável $r$ cujo domínio seja formado pelos números múltiplos de 6 e, no segundo caso, uma variável $s$ cujo domínio seja formado pelos números pares, escrevendo então as duas proposições na forma

- $\underset{r}{\forall}\ r$ é par
- $\underset{s}{\exists}\ s$ é múltiplo de 3

(é por esta razão que falamos de quantificação com domínio restringido). Trata-se, no entanto, claramente de uma solução artificial e que acaba por ser pouco fecunda para as aplicações. O que gostaríamos de fazer é utilizar variáveis cujo domínio seja o normal neste contexto, isto é, o dos números naturais. Isso consegue-se facilmente se repararmos que as duas afirmações significam respec-

[11]Refira-se, no entanto, que em exposições mais avançadas é costume substituir a quantificação múltipla por uma quantificação sucessiva.

tivamente o mesmo que

- Para cada número natural $n$, se $n$ é múltiplo de 6, então $n$ é par
- Existe um número natural $n$ tal que $n$ é par e $n$ é múltiplo de 3,

pelo que, usando os símbolos lógicos para os conectivos e os quantificadores, obtemos as formulações

- $\underset{n}{\forall}\,(n \text{ é múltiplo de } 6 \Rightarrow n \text{ é par})$
- $\underset{n}{\exists}\,(n \text{ é par} \land n \text{ é múltiplo de } 3)$,

Apesar de serem estas as formas que se revelam mais fecundas, em particular quando efectuamos raciocínios, é tradicional utilizar as notações, que lembram mais directamente a origem enquanto quantificação com domínios restringidos

- $\underset{n \text{ múltiplo de } 6}{\forall} n \text{ é par}$
- $\underset{n \text{ par}}{\exists} n \text{ é múltiplo de } 3$ ,

sem deixar de ter presente na nossa cabeça que o significado é o das formulações anteriores. Em resumo:

> Para obter uma quantificação universal com domínio restringido, aplicamos a quantificação universal a uma implicação cujo antecedente é a condição que restringe o domínio.
>
> Para obter uma quantificação existencial com domínio restringido, aplicamos a quantificação existencial a uma conjunção onde uma das condições intervenientes é a que restringe o domínio.

★ ★ ★ ★

O quantificador existencial admite uma variante importante que também importa examinar, o quantificador de existência e unicidade.

> O *quantificador de existência e unicidade* é um instrumento lógico que transforma uma expressão proposicional com uma variável numa proposição, que é verdadeira quando, e só quando, se verificarem simultaneamente as duas condições seguintes:
> a) Existe pelo menos uma substituição da variável que conduz a uma proposição verdadeira (a existência).
> b) Sempre que dois termos tiverem a propriedade de conduzir a uma proposição verdadeira, quando substituirmos a variável por qualquer deles, esses dois termos devem designar o mesmo objecto (a unicidade).

Repare-se que a primeira das condições referidas é precisamente a que caracteriza o quantificador existencial; a condição suplementar é que diferencia este quantificador. O quantificador de existência e unicidade aparece na liguagem corrente associado com frequência a palavras como "existe um, e um só" ou "há um único". Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador existencial, enunciamo-la antecedendo a expressão proposicional de partida do símbolo $\boxed{\exists^1}$ acompanhado da variável que figura nessa expressão (alguns autores utilizam alternativamente o símbolo $\boxed{\exists^!}$). Por exemplo, das três proposições

$$\bullet \underset{x}{\exists^1}\, x^2 = 0 \qquad\qquad \bullet \underset{x}{\exists^1}\, x^2 = -1 \qquad\qquad \bullet \underset{x}{\exists^1}\, x^2 = 1\,,$$

a primeira é verdadeira e as outras duas são ambas falsas, no primeiro caso por falhar a condição a) e no segundo por falhar a condição b) (as subsituições de $x$ por 1 e por $-1$ em "$x^2 = 1$" conduzem ambas a proposições verdadeiras, apesar de 1 e $-1$ não designarem o mesmo objecto).

Como no caso dos quantificadores universal e existencial, também podemos utilizar o quantificador de existência e unicidade para transformar expressões com mais que uma variável em expressões proposicionais com uma variável a menos, a qual passa a ficar muda. É o que acontece, por exemplo, com a expressão proposicional

$$\underset{x}{\exists^1}\, x^2 = y,$$

onde $y$ é a única variável livre, a qual se transforma numa proposição verdadeira quando se substitui $y$ por $0$ e se transforma numa proposição falsa quando se substitui $y$ por qualquer termo que designe um número real diferente de $0$.

Observe-se ainda que, tal como acontecia com os outros quantificadores, também com o quantificador de existência e unicidade faz sentido considerar a quantificação com domínio restrito, como na proposição "$\underset{x>0}{\exists^1}\, x^2 = 1$", que é verdadeira, e pode ser escrita na forma alternativa "$\underset{x}{\exists^1}\, (x > 0 \wedge x^2 = 1)$", que já não utiliza o domínio restrito.

★ ★ ★ ★

Ao utilizar os conectivos lógicos para combinar expressões com variáveis mudas podemos ser conduzidos a uma situação que, não sendo estritamente proíbida, há vantagem em evitar. Pensemos, por exemplo, que combinamos a proposição "$\underset{x}{\forall}\, x^2 \geq 0$" e a expressão proposicional "$x \geq 0$" com o conectivo $\wedge$, de modo a obter a expressão

$$(\underset{x}{\forall}\, x^2 \geq 0) \wedge (x \geq 0).$$

Se nos perguntarem se a variável $x$ é livre ou muda nesta última expressão, ficamos sem saber o que responder: ela é livre numa posição e muda noutra. Isso, não constitui um problema em absoluto; podemos olhar para ela como uma expressão proposicional a partir da qual, se nos mandarem, por exemplo substituir $x$ por 2, obtemos a proposição

$$(\underset{x}{\forall}\, x^2 \geq 0) \wedge (2 \geq 0)$$

(só substituímos $x$ nas suas ocorrência livres). Apesar de muitos matemáticos experientes não verem inconveniente em trabalhar com situações como a atrás descrita, facilitaremos bastante a nossa vida se evitarmos a ocorrência de situações como a anterior. Com esse objectivo faremos, daqui para a frente, a seguinte convenção:

**Convenção:** Só admitiremos combinar com os conectivos lógicos duas expressões com variáveis se não houver nenhuma variável que apareça livre numa delas e muda na outra.

Em tudo o que dissermos daqui em diante esta convenção estará implícita. Se, por acaso, tivéssemos necessidade de considerar a conjunção da proposição "$\underset{x}{\forall}\, x^2 \geq 0$" com a expressão proposicional "$x \geq 0$", o que faríamos era escrever previamente aquela proposição na forma "$\underset{y}{\forall}\, y^2 \geq 0$", que quer dizer o mesmo (o *truque* da substituição da variável muda), e obtínhamos então o resultado, que já não ofende a nossa convenção,

$$(\underset{y}{\forall}\, y^2 \geq 0) \wedge (x \geq 0).$$

## Exercícios

4) Para cada uma das expressões proposicionais seguintes, analisá-la até onde for possível em termos da sua formação a partir de expressões mais simples, por utilização dos conectivos lógicos e dos quantificadores. Em cada caso considerar que $x$, $y$ e $z$ são variáveis cujo domínio são os números reais e que $m$, $n$ e $p$ são variáveis cujo domínio são os números naturais.

a) Nem todos os números naturais são pares.

b) A equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem solução.

c) Há números naturais que não são pares nem primos.

d) $x$ é maior que todos os números reais.

e) Há pelo menos um número real que é maior que todos os números reais.

f) Existe um número real maior que $x$.

g) Para cada número real, existe um número real maior que ele.

h) Todos os números primos são ímpares ou iguais a 2.

i) Não existe divisor comum de $m$ e $n$ para além de 1.

j) As equações $x^2 - 1 = 0$ e $x^2 + 2x + 1 = 0$ têm uma solução comum.

l) Há pelo menos um número natural sem nenhum divisor, além de 1 e 7.

m) Todos os números reais, com a possível excepção de 0, têm um quadrado maior que 0.

n) Todos os números reais, excepto 0, têm um quadrado maior que 0.

5) Para cada uma das alíneas precedentes que seja uma proposição, encontrar uma proposição da linguagem corrente, por exemplo no domínio das pessoas, que admita uma análise do mesmo tipo. Não é necessário que as palavras que traduzam os conectivos e os quantificadores sejam as mesmas, o que se pede é que os conectivos e quantificadores sejam os mesmos e organizados do mesmo modo.

6) Para cada uma das expressões seguintes, no caso de se tratar de uma proposição, indicar se é verdadeira ou falsa e, no caso de se tratar de uma expressão proposicional com variáveis, indicar atribuições de valores às variáveis, se as houver, que a transforme numa proposição verdadeira e numa proposição falsa. Como anteriormente, considerar que $x$, $y$ e $z$ são variáveis cujo domínio são os números reais e que $m$, $n$ e $p$ são variáveis cujo domínio são os números naturais.

a) $\underset{x}{\forall}\ (x < 0 \vee x > 0)$.

b) $\underset{x}{\forall}\ (x \neq 0 \Rightarrow (x < 0 \vee x > 0))$.

c) $\underset{x}{\forall}\ ((x \geq 0 \wedge x \leq 0) \Rightarrow x = 0)$.

d) $\underset{n}{\forall}\ n > m$.

e) $\underset{m}{\exists}\ (\underset{n}{\forall}\ n > m)$.

f) $\underset{x}{\forall}\ x > y$.

g) $\underset{y}{\exists}\ (\underset{x}{\forall}\ x > y)$.

h) $\underset{y}{\exists}\ x > y$.

i) $\underset{x}{\forall}\ (\underset{y}{\exists}\ x > y)$.

j) $\underset{m,n}{\forall}\ m + n > m$.

l) $\underset{x}{\forall}\ (x \times y = 0 \Rightarrow y = 0)$.

m) $(\underset{x}{\forall}\ x \times y = 0) \Rightarrow y = 0$.

n) $\underset{y}{\exists^1}\ (\underset{x}{\exists^1}\ x^2 = y)$.

o) $\underset{x}{\exists^1}\ (\underset{y}{\exists^1}\ x^2 = y)$.

## 4. As expressões da linguagem matemática
## Outras construções

Mesmo depois de estudarmos os conectivos lógicos e os quantificadores, universal e existencial, ainda há expressões da linguagem que se nota claramente conterem na sua construção outras expressões mais simples mas que não conseguimos analisar. Pensemos, por exemplo, nas proposições

- $3 + 4$ é um número primo
- $3 + 4$ é menor que $3 \times 4$.

Nenhuma delas pode ser construída a partir de expressões mais simples, por utilização dos conectivos lógicos ou dos quantificadores, mas em ambas reconhecemos partes que têm significado matemático, nomeadamente os termos "$3 + 4$" e "$3 \times 4$". Podemos considerar que em cada uma delas há algo, as palavras "… é um número primo" na primeira e as palavras "… é menor que …", que combinado com os termos referidos fornece as proposições e que, combinado com outros termos forneceria outras proposições.

> Chama-se *símbolo predicativo* a um símbolo ou agrupamento de palavras que, combinado de modo conveniente com um ou mais termos, permite construir uma proposição. Ao número de termos necessários para completar o sentido de um simbolo proposicional costuma-se dar o nome de *ordem* do símbolo.

Por exemplo, o agrupamento de palavras "… é um número primo" é um símbolo predicativo de ordem 1 e o agrupamento de palavras "… é menor que …" é um símbolo predicativo de ordem 2. Este último símbolo é, como o estudante certamente já reconheceu, substituído frequentemente pelo símbolo $\boxed{\ldots < \ldots}$.

Naturalmente os termos que servem para completar o sentido de um símbolo predicativo não são termos arbitrários, devendo designar objectos de um certo domínio. Por exemplo, no caso do símbolo predicativo "… é um número primo", o domínio é o dos números naturais; não faz sentido considerar a proposição "$\sqrt{2}$ é um número primo". Pode até acontecer, no caso de símbolos de ordem maior que 1, que existam domínios diferentes para os termos que devem ser colocados nas diferentes posições, como acontece com o símbolo predicativo de ordem 2 "o ponto … está sobre a recta …" em que o primeiro domínio é constituído pelos pontos do espaço e o segundo pelas rectas.

Cada símbolo predicativo tem, um significado, isto é, um modo de sabermos, cada vez que o completamos com termos, o que quer dizer a proposição obtida ser verdadeira ou falsa.

Os símbolos predicativos que se utilizam num certo contexto, ou seja, quando se fala sobre um determinado assunto, dependem naturalmente do assunto em questão. Há, no entanto, um símbolo predicativo muito importante, que intervém em todos os contextos. Trata-se do símbolo predicativo de ordem 2 "é igual a", subsituído frequentemente pelo símbolo $\boxed{\ldots = \ldots}$, que, completado com dois termos com o mesmo domínio, permite obter uma proposição que será verdadeira quando os dois termos designarem o mesmo objecto e será falsa se os dois termos designarem objectos diferentes. Por exemplo, a proposição "$4 + 3 = 5 + 2$" é uma proposição verdadeira, porque os termos "$4 + 3$" e "$5 + 2$" designam o mesmo objecto, e a proposição "$2 + 2 = 3$" é falsa.

Reparemos também que, do mesmo modo que ao completarmos os símbolos predicativos com termos, obtemos proposições, se os completarmos, em vez disso, com expressões designatórias, ou com expressões designatórias e termos, obtemos expressões proposicionais. Por exemplo, o símbolo predicativo de ordem 2 "… é menor que …", completado com a expressão designatória "$x^2 + x$" e o termo "4" conduz-nos à expressão proposicional "$x^2 + x$ é menor que 4".

Com um papel de certo modo paralelo ao dos símbolos predicativos, aparecem também outros a que daremos o nome de símbolos funcionais; enquanto os primeiros servem para construir proposições a partir de termos, estes servem para construir novos termos a partir de outros.

> Chama-se *símbolo funcional* a um símbolo ou agrupamento de palavras que, combinado de modo conveniente com um ou mais termos, permite construir um novo termo. Ao número de termos necessários para completar o sentido de um simbolo funcional costuma-se dar o nome de *ordem* do símbolo.

Por exemplo, os termos

- metade de 6
- $5 + 4$

utilizam respectivamente o simbolo funcional de ordem 1 "metade de …" e o símbolo funcional $\boxed{\ldots + \ldots}$, de ordem 2.

Tal como acontecia com os símbolos predicativos, também no caso dos símbolos funcionais cada posição a ser completada com um termo tem um domínio associado (nos exemplos anteriores pode-se considerar que os domínios são os números reais, mas também podemos considerar os números naturais como domínio). Na prática acontece mesmo, com frequência um fenómeno não muito agradável: Trata-se do que acontece com alguns símbolos funcionais onde, para além de ser necessário assegurarmo-nos que os termos a substituir são compatíveis com os domínios associados, existem ainda condições suplementares a serem verificadas para a substituição fazer sentido. Pensemos, por exemplo no símbolo funcional de ordem 2 com domínios reais "o quociente de … por …" em que é necessário, para fazer a substituição, que o segundo termo a substituir designe um número diferente de 0, ou no símbolo funcional de ordem dois, tendo os pontos do plano como domínio, "a recta definida pelos pontos … e …", em que é necessário assegurarmo-nos de que os termos a substituir designem pontos distintos.[12]

Também como acontecia no caso dos símbolos predicativos, se, em vez de completarmos um símbolo funcional com termos, o completarmos com expressões designatórias (ou expressões designatórias e termos), obtemos, em vez de termos, expressões designatórias. É o que acontece, por exemplo, quando

[12] É evidente que preferíamos não ter que fazer esta observação, mas não podemos evitá-la. É a vida…

completamos o símbolo funcional $\boxed{\ldots + \ldots}$ com a expressão designatória "$x^2$" e o termo "$2 + 3$", para obter a expressão designatória "$x^2 + (2 + 3)$".

No quadro da linguagem matemática aparecem ainda constantes, como $\boxed{4}$, $\boxed{\pi}$ ou "o número de ouro". Em geral chamam-se *constantes* aos termos da linguagem que não são susceptíveis de análise em termos de expressões significativas mais simples. É cómodo olhar para as constantes como símbolos funcionais com $0$ variáveis, dentro da mesma óptica que nos leva a olhar para as proposições e os termos como expressões proposicionais e designatórias com $0$ variáveis.

★ ★ ★ ★

Os símbolos predicativos e funcionais e as constantes que intervêm num contexto matemático não constituem um conjunto estático dado à partida. A linguagem está frequentemente a ser enriquecida com novos símbolos predicativos e funcionais e novas constantes, que são introduzidos através daquilo a que se dá o nome de "definições".

> Uma *definição* é um processo a partir do qual se introduz um novo símbolo predicativo ou funcional, ou uma nova constante, explicando ao mesmo tempo o significado do que se está a definir.

O modo como se procede para apresentar uma definição depende do tipo de entidade a definir. Por exemplo, para definir uma constante, chamada *número de ouro*, pode-se escrever a igualdade

$$\text{número de ouro} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

em que no primeiro membro aparece a constante a definir e no segundo aparece um termo com significado já conhecido. Uma das condições para poder apresentar uma definição como esta é que o número de ouro não tivesse sido definido anteriormente. O número de ouro pode ter, e tem, outras caracterizações alternativas, como, por exemplo, "o número poitivo que é igual ao seu inverso, somado com 1", mas só uma das caracterizações pode ser tomada como definição, as outras sendo então propriedades que carecem de justificação[13]. Em geral podemos dizer:

> A definição de uma nova constante faz-se escrevendo uma igualdade em que essa constante aparece no primeiro membro e no segundo é colocado um termo cujo significado é já conhecido.

[13]Isto sem prejuizo de diferentes pessoas considerarem diferentes caracterizações como sendo a definição que escolhem, o que não prejudica a capacidade de diálogo entre elas, desde que a definição de cada uma corresponda a uma igualdade que as outras reconhecem como válida.

Suponhamos agora que queremos definir o que é a média aritmética de dois números reais, ou seja, que queremos definir o símbolo funcional de ordem 2 “a média aritmética de … e …”. O modo de o fazer é utilizar duas variáveis reais $x$ e $y$ e escrever

$$\text{a média aritmética de } x \text{ e } y = \frac{x+y}{2},$$

uma vez que então, quando alguém quiser conhecer a média aritmética de dois números não tem mais do que substituir na igualdade anterior as variáveis por termos que designem esses números. Em geral, podemos dizer:

> A definição de um novo símbolo funcional, com uma certa ordem, faz-se escrevendo uma igualdade em que no primeiro membro aparece esse símbolo funcional completado com tantas variáveis distintas quantas a ordem e no segundo membro aparece uma expressão designatória com essas, e só essas, variáveis, cujo significado seja já conhecido.

A definição de novos símbolos predicativos faz-se por um método análogo, com a diferença de, em vez de uma igualdade, se recorrer a uma equivalência. Por exemplo, no quadro dos números naturais, quando queremos definir o símbolo predicativo, de ordem 2, “… e … são primos entre si”, escrevemos

$$m \text{ e } n \text{ são primos entre si } \Leftrightarrow \text{ não existe divisor comum de } m \text{ e } n \text{ diferente de } 1$$

Em geral, podemos dizer:

> A definição de um novo símbolo predicativo, com uma certa ordem, faz-se escrevendo uma equivalência em que à esquerda do conectivo aparece esse símbolo predicativo completado com tantas variáveis distintas quantas a ordem e à direita aparece uma expressão proposicional com essas, e só essas, variáveis, cujo significado seja já conhecido.

A definição que atrás nos serviu de exemplo poderia ter sido enunciada em lingagem corrente na forma “Diz-se que $m$ e $n$ são primos entre si se, e só se, não existe divisor comum de $m$ e $n$ diferente de 1”.

De facto há um abuso de linguagem muito frequente na prática e para o qual é conveniente estarmos alertados: Quando é claro que estamos no contexto duma definição, usa-se por vezes uma frase que significaria correntemente uma implicação, dando-lhe o sentido de equivalência que deve ter. Por exemplo, a definição anterior seria enunciada simplesmente na forma “Diz-se que $m$ e $n$ são primos entre si se não existe divisor comum de $m$ e $n$ diferente de 1”.

★ ★ ★ ★

Para terminarmos a nossa reflexão sobre o modo como as expressões matemáticas podem ser construídas a partir de expressões mais simples, resta-nos examinar um tipo de construção que ainda não encontrámos. Pensemos, por exemplo, no termo "o número cujo cubo é oito", que também pode ser descrito, de forma um pouco mais explícita, na forma "o número $x$ tal que $x^3 = 8$". Trata-se claramente de um termo que tem alguma coisa a ver com a expressão proposicional "$x^3 = 8$", mas, até agora, não tínhamos referido nenhum procedimento lógico que permitisse obter um termo a partir duma expressão proposicional. Repare-se que só foi possível referir "**o** número $x$ tal que $x^3 = 8$" porque existe um único $x$ nessas condições, isto é, porque é verdadeira a proposição "$\underset{x}{\exists^1} x^3 = 8$". Nas condições anteriores, dizemos que o termo "o número $x$ tal que $x^3 = 8$" foi construído a partir da expressão proposicional "$x^3 = 8$" através do *operador de explicita*ção.

> O *operador de explicitação* é um instrumento lógico que transforma uma expressão proposicional com uma variável num termo. Para poder ser aplicado, expressão proposicional de partida deve ter a propriedade de ser transformada numa proposição verdadeira pelo quantificador de existência e unicidade; o termo obtido tem então a propriedade de tornar a expressão verdadeira quando colocado no lugar da respectiva variável.

A última propriedade que referimos não corresponde mais do que ao facto evidente de o número cujo cubo é igual a 8 ter um cubo igual a $8\ldots$

Quando queremos tornar claro que um termo é obtido através da utilização do operador de explicitação, escrevemo-lo antecedendo a expressão proposicional de partida do símbolo $\boxed{\iota}$[14] acompanhado, usualmente em índice, da variável que figura nessa expressão e englobando eventualmente entre parênteses a expressão proposicional, no caso em que isso possa contribuir para uma melhor clareza ou para evitar ambiguidades. Assim, o termo que nos tem servido de exemplo pode ser escrito na forma "$\iota_x(x^3 = 8)$", onde, como no caso dos quantificadores, a variável $x$ passa a ser uma variável muda. Tal como acontecia com os símbolos para os conectivos lógicos e os quantificadores, o símbolo para o operador de explicitação é utilizado muito poucas vezes na prática, continuando a empregar-se as expressões da linguagem corrente. A sua utilização apresenta, no entanto, interesse quando procuramos examinar com atenção a análise de uma expressão da linguagem.

O operador de explicitação é aplicado, mais geralmente, a expressões proposicionais com mais variáveis, conduzindo então não a um termo mas a uma expressão proposicional. Em vez de enunciarmos cuidadosamente os pressupostos e o modo como essa aplicação é feita, o que nos obrigaria a uma exposição de difícil compreensão, preferimos limitar-nos a examinar dois exemplos elucidativos.

O primeiro exemplo retoma o exemplo de que partimos, reparando que o que se fez com o termo 8 não joga aí nenhum papel especialmente importante. Assim, reparando que a expressão proposicional "$\underset{x}{\exists^1} x^3 = y$" (com $y$ como única variável livre) é universal, podemos considerar a expressão designatória

[14] Trata-se da letra grega minúscula *iota*.

"$\iota_x(x^3 = y)$", mais uma vez com $y$ como única variável livre, expressão que, na linguagem corrente costuma ser enunciada como "o número cujo cubo é $y$". Como acontece com frequência em situações deste tipo, a expressão designatória anterior costuma ser utilizada para definir um símbolo funcional de ordem 1, neste caso o símbolo "$\sqrt[3]{\dots}$", através da igualdade

$$\sqrt[3]{y} = \iota_x(x^3 = y),$$

ou, em linguagem corrente,

$$\sqrt[3]{y} = (\text{o número cujo cubo é } y).$$

O segundo exemplo é do mesmo tipo, mas ilustra uma dificuldade frequente na prática. O que vamos fazer é substituir no exemplo precedente "o cubo" por "o quadrado". A dificuldade está em que a expressão proposicional "$\underset{x}{\exists^1} x^2 = y$" já não é universal pelo que não fará sentido falar de "o número cujo quadrado é $y$"; esta expressão faria sentido se substituíssemos $y$ por $0$, mas já não faria sentido se substituíssemos $y$ por $-1$ (não existe $x\dots$) nem por $1$ (não há unicidade para $x$ pelo que a expressão é ambígua). Para melhorar um pouco as coisas, recorre-se a um artifício que o estudante decerto já encontrou quando definiu a raíz quadrada: Trabalha-se com a expressão designatória "$\underset{x}{\exists^1}(x \geq 0 \wedge x^2 = y)$" que, apesar de ainda não ser universal, fica pelo menos verdadeira quando se substitui $y$ por um termo que designe um real maior ou igual a $0$. Considera-se então

$$\iota_x(x \geq 0 \wedge x^2 = y)$$

como uma expressão designatória, com $y$ como variável livre, cujo domínio, em vez de ser a totalidade dos reais, é formado pelos reais maiores ou iguais a $0$. Essa expressão, que em linguagem corrente pode ser enunciada "o número maior ou igual a $0$ cujo quadrado é $y$" é a que é utilizada para definir o símbolo funcional de ordem 1 "$\sqrt{\dots}$", cujo domínio é precisamente constituído pelos reais maiores ou iguais a $0$:

$$\sqrt{y} = \iota_x(x \geq 0 \wedge x^2 = y).$$

★ ★ ★ ★

Em Matemática é por vezes cómodo utilizar o processo de explicitação em situações em que há existência, mas não obrigatoriamente unicidade, na expressão proposicional de partida. Estamos a pensar em situações como aquela em que sabemos que existem números primos maiores que $10^{10}$ e dizemos "seja $a$ um número primo escolhido maior que $10^{10}$". Está-se em presença de algo semelhante ao operador explicitação, com a diferença que, uma vez que não há um único número primo maior que $10^{10}$, nunca saberemos qual é exactamente o objecto a que "$a$" se refere; a única coisa que sabemos de certeza é que a proposição "$a$ é primo e $a > 10^{10}$" é verdadeira. A este instrumento lógico, que na linguagem corrente tem uma formulação semelhante à do operador de explicitação, mas com o artigo indefinido "um" em vez do artigo definido "o", poderíamos dar o nome de *operador de explicitação indefinida*. O seu papel costuma ser meramente o de instrumento auxiliar no decurso de um argumento.

## Exercícios

7) No quadro do estudo dos números naturais, e supondo apenas conhecidos à partida constantes que designam diferentes números, os símbolos funcionais de ordem 2 "$\ldots + \ldots$" e "$\ldots \times \ldots$" e os símbolos predicativos de ordem 2 "$\ldots = \ldots$" e "$\ldots < \ldots$", definir sucessivamente os símbolos predicativos nas alíneas seguintes, assim como o símbolo funcional na última alínea. Em cada alínea pode utilizar também os símbolos predicativos definidos nas alíneas precedentes.

a) $\ldots \leq \ldots$.
b) $\ldots > \ldots$.
c) … é divisor de ….
d) … e … são primos entre si.
e) … é par.
f) … é ímpar.
g) … é primo.
h) … é divisor comum de … e ….
i) … é máximo divisor comum de … e ….
l) o máximo divisor comum de … e ….

8) No quadro do estudo dos números reais, e supondo apenas conhecidos à partida constantes que designam diferentes números, os símbolos funcionais de ordem 2 "$\ldots + \ldots$" e "$\ldots \times \ldots$" , os símbolos predicativos de ordem 2 "$\ldots = \ldots$" e "$\ldots < \ldots$" e o símbolo predicativo de ordem 1 "… é número inteiro", definir sucessivamente os símbolos predicativos e funcionais nas alíneas seguintes. Em cada alínea pode utilizar também os símbolos definidos nas alíneas precedentes.

a) $\ldots \leq \ldots$.
b) $\ldots \neq \ldots$.
c) $\ldots - \ldots$ (a diferença entre … e …).
d) $\ldots / \ldots$ (o quociente de … por …), reparando qual a condição que restringe o domínio deste símbolo funcional.
e) … é número racional.
f) $|\ldots|$ (o valor absoluto de …).

## 5. Primeiro exemplo de raciocínio matemático

> O raciocínio lógico, ou raciocínio matemático é um conjunto de métodos que podemos utilizar para assegurar a validade de certas afirmações, desde que acreditemos na validade de outras que consideramos como conhecidas.

Não é fácil descrever, com todos os pormenores, a totalidade dos métodos que o raciocínio lógico utiliza, pelo menos num texto destinado a estudantes que tomam contacto pela primeira vez com um estudo sistematizado destes. Uma tentativa de fazer uma tal descrição pormenorizada levaria possivelmente a um texto pesado e difícil de compreender. O que vamos tentar fazer é descrever, principalmente a partir de exemplos, alguns dos métodos que são utilizados com mais frequência e alertar, ao mesmo tempo, para alguns raciocínios incorrectos que as pessoas menos atentas fazem por vezes.

A exposição que fazemos a seguir não deve ser olhada como um espartilho pelo estudante. Este pode, e deve, continuar a fazer raciocínios independentemente de eles se enquadrarem ou não no que vamos examinar. O nosso objectivo não é limitar ou mecanizar o raciocínio, mas ajudar a organizar este, contribuir para a melhoria da capacidade do o transmitir aos outros e, nalguns casos, ajudar a desarmar certos bloqueamentos mentais.

Também nunca é demais sublinhar que o raciocínio lógico está longe de ser a única, ou até a mais importante, actividade matemática. Esta deve ser encarada e exercida como um todo equilibrado, para o qual muitas competências e habilidades concorrem e onde a nossa imaginação e capacidade criativa não se devem deixar domesticar. Pensamos, por exemplo, na capacidade de formar imagens mentais intuitivas, na capacidade de resolver problemas concretos, tanto a partir do reconhecimento da possibilidade de aplicar métodos já estudados como a partir da crisção de novos métodos, na capacidade de reconhecer analogias em situações aparentemente diferentes e daí partir para a criação de novos métodos gerais, na capacidade de desenvolver experiências e tirar daí conjecturas. O raciocínio lógico deve ser olhado como a criação de pontos de segurança, a partir dos quais nos deslocamos com mais liberdade, mesmo que convivendo com a probabilidade, maior ou menor, de estarmos a errar.

★ ★ ★ ★

Quando dizemos que o objectivo do raciocínio lógico é estabelecer a validade de certas afirmações, estamos a pensar nas afirmações como sendo expressões proposicionais e na sua validade como significando que são universais[15]. Ao método utilizado para garantir a validade da afirmação costuma-se dar o nome de *prova* ou *demonstração* da afirmação. Vejamos a seguir um primeiro exemplo, muito simples, de demonstração.

**Exemplo 1.** O objectivo é demonstrar, no quadro dos números reais, a expressão proposicional

$$\text{Se } x > 7 \text{ então } x^2 + x > 8 \times x.$$

A demonstração poderia ser apresentada do seguinte modo:
Suponhamos que $x > 7$.
Como $7 > 0$,
Tem-se também $x > 0$.
Por uma propriedade da multiplicação resulta $x \times x > 7 \times x$
Por uma propriedade da adição deduzimos $x \times x + x > 7 \times x + x$
Ou seja $x^2 + x > 8 \times x$
Uma vez que, a partir da hipótese "$x > 7$", chegámos à conclusão "$x^2 + x > 8 \times x$", ficou provado que "Se $x > 7$ então $x^2 + x > 8 \times x$". $\square$[16]

Na demonstração anterior, e ao contrário do que acontece normalmente num texto corrido, fizémos várias mudanças de linha com o objectivo de tornar claro aquilo a que podemos chamar os *passos da demonstração*. Em cada linha da demonstração apresentada figura uma expressão proposicional, o *passo* da demonstração, acompanhado por vezes de uma pequena explicação da razão porque o passo pode ser escrito. Para percebermos melhor a estrutura da demonstração, começamos por apresentar um lista numerada dos passos desta:

1. $x > 7$
2. $7 > 0$
3. $x > 0$
4. $x \times x > 7 \times x$
5. $x \times x + x > 7 \times x + x$
6. $x^2 + x > 8 \times x$
7. Se $x > 7$ então $x^2 + x > 8 \times x$.

O último passo da demonstração é aquilo que pretendemos demonstrar, em particular é uma expressão proposicional universal. Os restantes passos, com a excepção do segundo, que é uma proposição verdadeira, já não são expressões proposicionais universais (o que acontece, por exemplo ao passo 3 se substituirmos $x$ por $-1$?) mas sim o que chamaremos expressões universais com a *hipótese* (ou *premissa*) "$x > 7$". Uma *expressão proposicional universal com uma, ou mais, hipóteses* é uma expressão proposicional que fica verdadeira

[15] De acordo com as convenções que temos vindo a utilizar, as afirmações podem, em particular, ser proposições, caso em que a sua validade corresponde a serem verdadeiras.

[16] O sinal $\square$ é utilizado com alguma frequência para indicar que se terminou uma demonstração.

sempre que se atribuem valores às variáveis que tornam as hipóteses verdadeiras.[17]

Com um objectivo análogo ao que conduziu à convenção, enunciada na página 21, de não admitir expressões com ocorrências livre e ocorrência mudas duma mesma variável, vamos enunciar a seguinte convenção:

**Convenção:** Quando referirmos que uma expressão proposicional é universal com uma, ou mais, hipóteses, suporemos sempre que a expressão proposicional não tem variáveis mudas que estejam livres nalguma das hipóteses nem variáveis livres que estejam mudas nalguma das hipóteses.

Ao contrário do que é costume fazer na prática, em que isso costuma ficar implícito, escrevamos de novo os passos da demonstração acompanhados à frente, entre parênteses, de uma referência à hipótese sob a qual eles são enunciados (a referência será feita através do número do passo em que a hipótese foi introduzida):

| | |
|---|---|
| 1. $x > 7$ | (1) |
| 2. $7 > 0$ | |
| 3. $x > 0$ | (1) |
| 4. $x \times x > 7 \times x$ | (1) |
| 5. $x \times x + x > 7 \times x + x$ | (1) |
| 6. $x^2 + x > 8 \times x$ | (1) |
| 7. Se $x > 7$ então $x^2 + x > 8 \times x$. | |

Cada passo da demonstração deverá estar numa das condições seguintes:

a) Ser uma expressão proposicional que já é reconhecida como universal ou ser uma definição auxiliar. Um tal passo não terá nenhuma hipótese associada. No exemplo anterior é isso que acontece com o passo 2.

b) Ser a introdução de uma hipótese. Esse passo vai ter então como hipótese, o próprio passo (a sua validade não vai assim ser nada de muito profundo…). A introdução de uma hipótese é feita frequentemente com uma frase do tipo "suponhamos que…". No exemplo anterior o primeiro passo é precisamente a introdução de uma hipótese.

c) Resultar de um, ou mais, passos anteriores por alguma *regra de inferência*. Essas regras de inferência são esquemas de raciocínio, que permitem garantir a validade de certas afirmações a partir da validade de outras, e que foram sendo adquiridas pela humanidade ao longo dos tempos e por cada um de nós ao longo da nossa experiência de vida.

Não é fácil explicitar todas a regras de inferência e há normalmente muitos modos diferentes de fazer uma demonstração, cada um utilizando as suas regras de inferência. Há infelizmente também falsas regras de inferência, que podem

[17]Não afirmamos, naturalmente, nada sobre as substituições de variáveis que tornem falsa alguma das hipóteses.

conduzir a resultados incorrectos, e que certas pessoas menos atentas aplicam por vezes. O que tentaremos fazer é examinar, com a ajuda de exemplos simples que sejam esclarecedores, algumas das regras de inferência de utilização mais frequente, alertando também para algumas das falsas regras de inferência que a experiência mostra que são utilizadas com mais frequência.

Retomando o exemplo de demonstração apontado acima, reconhecemos que:

O passo 1 corresponde à introdução de uma hipótese (em linguagem corrente dissémos "suponhamos que $x > 7$").

O passo 2 é um resultado conhecido, e por isso não depende de nenhuma hipótese.

O passo 3 resulta dos passos 1 e 2 e da propriedade transitiva da desigualdade. Por esse motivo ele depende também da hipótese da qual já dependia o passo 1.

O passo 4 resulta dos passos 1 e 3 e duma propriedade conhecida relacionando as desigualdades com a multiplicação por um número positivo. Por esse motivo ele depende da hipótese de que já dependia o passo 3.

O passo 5 resulta do passo 4 e duma propriedade conhecida relacionando as desigualdades com a soma. Mais uma vez ele depende da mesma hipótese que o anterior.

O passo 6 resulta do passo 5, e das igualdades conhecidas "$x \times x = x^2$" e "$7 \times x + x = 8 \times x$". Mais uma vez ele depende da mesma hipótese que o anterior.

Por fim, o passo 7 resulta do passo 6 e, o que poderá parecer estranho à primeira vista, ao contrário deste, não depende de nenhuma hipótese.

A maioria das regras de inferência tem um comportamento similar, relativamente às hipóteses de que dependem os passos envolvidos: A conclusão está dependente de todas as hipóteses das quais dependa algum dos passos de que se partiu. Se todas as regras fossem deste tipo, não tínhamos maneira de alguma vez chegar a conclusões que não dependam de nenhuma hipótese. Felizmente existem algumas (poucas…) regras que permitem diminuir o número de hipóteses de que dependem as nossas afirmações. A primeira dessas regras é o chamado método da hipótese auxiliar, que explicamos a seguir, e que foi o utilizado, no exemplo anterior, na passagem do passo 6 para o passo 7.

**Método da hipótese auxiliar:** Se uma afirmação é verdadeira desde que se suponha que uma segunda o é, então a segunda implica a primeira. Mais precisamente:

Suponhamos que temos um passo de uma demonstração, que seja uma certa proposição ou expressão proposicional, a depender de uma certa hipótese. Podemos deduzir daí, já sem a dependência dessa hipótese, a implicação, cujo consequente é a proposição ou expressão proposicional dada e cujo antecedente é a hipótese.

Em geral pode haver situações em que o passo de partida dependa de outras hipóteses, além daquela que passamos para antecente da implicação. Nesses casos a implicação a que se chega depende ainda das restantes hipóteses.

No exemplo que estamos a examinar, de sabermos que "$x^2 + x > 8 \times x$" é válido com a hipótese "$x > 7$", deduzimos a validade da implicação "$x > 7 \Rightarrow x^2 + x > 8 \times x$", independentemente de qualquer hipótese.

Outra observação importante diz respeito à introdução de uma hipótese. Do ponto de vista lógico é totalmente válido introduzir as hipóteses que mais nos agradarem: Pode sempre dizer-se "suponhamos que…". Isso pode dar a ideia errada de uma facilidade que, de facto não é real. Introduzir uma hipótese numa demonstração é um pouco como pedir dinheiro emprestado: É cada vez mais fácil fazê-lo hoje em dia, mas convém sabermos à partida como é que vamos fazer para pagar a dívida, no nosso caso como é que nos vamos ver livres da hipótese, uma vez que a conclusão final não deve depender de nenhuma hipótese. Por isso, do ponto de vista estratégico, será importante reconhecer quando é que valerá a pena introduzir uma hipótese. No caso que examinámos como exemplo isso foi bastante simples: Quando o que se pretende demonstrar é uma implicação, segue-se frequentemente o *método directo* de demonstração, isto é, começa-se por introduzir o antecedente da implicação como hipótese e tenta-se, a partir daí, chegar ao consequente desta, após o que se declara a demonstração terminada, ficando implícita a aplicação posterior da regra atrás referida. Na prática é muito frequente aquilo que se quer demonstrar ser uma implicação e, nesse caso, costuma-se dizer que o antecedente da implicação é a *hipótese* e o consequente desta é a *tese*; diz-se assim que, no método directo, parte-se da hipótese para chegar à tese.

É muito raro que todos os passos de uma demonstração sejam explicitados completamente; isso conduziria facilmente a demonstrações extremamente longas e aborrecidas. O que se passa é que o autor da demonstração conhece o destinatário desta e omite muitos dos passos que considera que o destinatário completará sem dificuldade. Retomando o exemplo que apresentámos, vamos agora reparar que houve de facto alguns passos omitidos na nossa demonstração e vamos completá-la, com o objectivo de reconhecer mais algumas regras de inferência, muito simples, que foram utilizadas. Para evitar ter que mudar a referência numérica que utilizámos atrás, vamos referir os passos que acrecentaremos sem os numerar.

A primeira passagem que poderia merecer uma maior atenção é a dos passos 1 e 2 para o passo 3. Referimos a utilização da propriedade transitiva da desigualdade mas é legítimo alguém perguntar que propriedade é essa e como foi utilizada. A propriedade transitiva da desigualdade diz que, se um número é maior que outro e este é maior que um terceiro, então o primeiro é maior que o terceiro, ou seja, em termos simbólicos, que a implicação

$$(y > z \wedge z > w) \Rightarrow y > w$$

é universal[18]. Esta implicação pode ser assim colocada como um passo da nossa demonstração, que não depende de nenhuma hipótese. Em seguida, para aplicarmos ao caso que nos interessa, podemos particularizar e escrever

[18]Podemos usar as variáveis que quisermos, em vez de $y, z, w$, para exprimir esta propriedade em termos simbólicos.

$$(x > 7 \wedge 7 > 0) \Rightarrow x > 0.$$

A possibilidade de escrever o passo anterior é explicada por mais uma regra de inferência, que se utiliza com muita frequência:

> **Regra de particularização**: Se uma afirmação é universal, então continua a sê-lo quando substituirmos algumas das suas variáveis. Mais precisamente:
>
> A partir de um passo duma demonstração pode-se inferir outro passo que se obtém substituindo algumas das suas variáveis por termos ou expressões designatórias. No caso em que o passo de partida esteja dependente de alguma hipótese, o passo que se obtém vai depender da mesma hipótese, devendo haver o cuidado de não substituir variáveis que apareçam nas hipóteses.

O significado da regra anterior é claro: Se uma expressão proposicional é universal, ela fica verdadeira depois de substituirmos as suas variáveis por termos arbitrários; no caso em que ela é apenas universal sobre certas hipóteses, as variáveis que aparecem nas hipóteses já não podem ser substituídas por termos arbitrários, uma vez que não sabemos se eles tornam verdadeiras as hipóteses.

Voltando ao nosso exemplo, quando aplicámos esta regra não havia dependência de hipóteses e substituiu-se a variável $y$ pela expressão designatória "$x$" e as variáveis $z$ e $w$ pelos termos "7" e "0", respectivamente. De seguida podemos escrever o passo

$$x > 7 \wedge 7 > 0,$$

que resulta dos passos 1 e 2 por uma das regras de conjunção que enunciamos em seguida, passo esse que vai estar dependente, como o passo 1, da hipótese "$x > 7$" e o passo 3, "$x > 0$", resulta então dos passos

$$(x > 7 \wedge 7 > 0) \Rightarrow x > 0 \qquad\qquad x > 7 \wedge 7 > 0,$$

por aplicação da regra *Modus Ponen*, que também enunciamos a seguir, e depende da hipótese "$x > 7$", como acontecia com o segundo.

> **Regras de conjunção**: De dois passos de uma demonstração, podemos deduzir o passo que se obtém deles por utilização do conectivo de conjunção. De um passo de uma demonstração que seja uma conjunção de duas expressões pode sempre deduzir-se qualquer das duas como novo passo. Em ambos os casos as hipóteses do passo que se obtém são aquelas de que já dependia algum dos passos de partida.

**Modus Ponen**:[19] Se uma afirmação implica outra e a primeira é verdadeira, então a outra também o é. Mais precisamente:

Se uma demonstração tem dois passos, um dos quais é um implicação e o outro é o antecedente desta, então pode-se inferir desses dois passos um novo passo, que é o consequente da implicação. O passo obtido vai estar dependente das hipóteses de que dependesse algum dos passos de partida.

Na demonstração que nos tem vindo a servir de exemplo, também foram omitidos alguns passos entre o passo 3 e o passo 4 e entre o passo 4 e o passo 5. É talvez útil o estudante testar a sua compreensão do que está em jogo, escrevendo explicitamente esses passos, na mesma linha do que foi feito atrás. As propriedades referidas na demonstração em linguagem corrente, relacionando as desigualdades com a soma e a multiplicação, correspondem ao facto de serem universais as expressões proposicionais

$$(y > z \wedge w > 0) \Rightarrow y \times w > z \times w$$
$$y > z \Rightarrow y + w > z + w,$$

a primeira das quais, por exemplo, costuma ser enunciada, em linguagem corrente, dizendo que, "se multiplicarmos ambos os membros de uma desigualdade por um número maior que $0$, obtemos uma desigualdade do mesmo sentido". Lembremos, a propósito, a necessidade de escrevermos "$w > 0$", no caso da primeira implicação. Como o estudante decerto recordará, com a condição "$w < 0$", o que se poderia escrever é

$$(y > z \wedge w < 0) \Rightarrow y \times w < z \times w.$$

(se multiplicarmos ambos os membros de uma desigualdade por um número menor que $0$, obtemos uma desigualdade de sentido contrário).

Para terminarmos a nossa reflexão sobre o exemplo 1, vamos ainda examinar a passagem do passo 5 para o passo 6 que, para além de ter deixado outros passos implícitos, ilustra uma nova regra de inferência de utilização muito comum no raciocínio matemático. Lembremos que o passo 5 era a expressão proposicional

$$x \times x + x > 7 \times x + x,$$

com a hipótese "$x > 7$". Os passos omitidos são as expressões proposicionais universais conhecidas

$$x \times x = x^2 \qquad 7 \times x + x = 8 \times x.$$

Utilizando a propriedade fundamental da igualdade que enunciamos a seguir

[19]O nome desta regra é o nome latino dum dos silogismos da Lógica Grega. O exemplo clássico desse silogismo é a dedução: Todos os homens são mortais e Sócrates é homem, logo Sócratas é mortal. Dentro do ponto de visto em que nos temos vindo a colocar, este raciocínio é uma mistura da regra que estamos a enunciar com a regra de particularização.

deduzimos sucessivamente as expressões

$$x^2 + x > 7 \times x + x$$
$$x^2 + x > 8 \times x,$$

em ambos os casos sob a hipótese "$x > 7$", no primeiro caso substituindo no passo 5, "$x \times x$" por "$x^2$" e no segundo caso substituindo na nova expressão "$7 \times x + x$" por "$8 \times x$".

**Propriedade fundamental da igualdade**: Se duas coisas são iguais, então a segunda pode substituir a primeira onde quer que ela apareça. Mais precisamente:

Suponhamos que temos dois passos de uma demonstração, um dos quais é uma igualdade entre duas expressões designatórias e o outro é uma expressão proposicional em cuja construção ocorre uma ou mais vezes, uma dessas duas expressões designatórias. Podemos então escrever um novo passo da demonstração que é a expressão proposicional que se obtém do segundo passo referido substituindo uma ou mais vezes a ocorrência dessa expressão designatória pela outra expressão designatória. A conclusão vai, naturalmente, depender de qualquer das hipóteses de que eventualmente dependesse algum dos dois passos de partida.

Como outro exemplo de aplicação da regra anterior, citemos aquele em que temos dois passos como

$$2x = y + 1$$
$$2x + y = 2x - y$$

e deduzimos destes dois passos, quer

$$y + 1 + y = 2x - y,$$

quer

$$y + 1 + y = y + 1 - y,$$

no primeiro caso substituindo na segunda igualdade a primeira ocorrência de "$2x$" por "$y + 1$" e no segundo caso fazendo isso com ambas as ocorrências.

Terminado o estudo deste exemplo, aproveitemos para fazer algumas observações relacionadas com as regras de inferência que já examinámos.

A primeira, diz respeito a uma regra incorrecta que é por vezes aplicada, por confusão com a regra *Modus Ponen*: Trata-se de, a partir de uma implicação e do respectivo consequente, inferir incorrectamente o antecedente. Por exemplo, da implicação "$x > 5 \Rightarrow x > 0$" e de "$x > 0$" **não** se pode inferir "$x > 5$".

Pelo contrário, há uma variante de Modus Ponen que já funciona nos dois sentidos, a saber, aquela em que, em vez de uma implicação, temos uma equivalência: Se um passo for a equivalência de duas expressões e outro passo for uma delas, desses dois passos pode-se inferir a outra expressão.

Uma segunda observação está relacionada com aquilo a que demos o nome de "propriedade fundamental da igualdade". Há três propriedades clássicas da igualdade que não referimos e que o estudante decerto já encontrou, sob o nome de propriedades reflexiva, simétrica e transitiva: A propriedade reflexiva diz-nos que, qualquer que seja a expressão designatória, a igualdade em que ambos os membros são iguais a essa expressão designatória é sempre universal, independentemente de qualquer hipótese. Por exemplo, podemos sempre escrever

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + 1.$$

A propriedade simétrica diz-nos que, duma igualdade entre duas expressões designatórias, pode-se sempre inferir, com as mesmas hipóteses, a igualdade que se obtém trocando os dois membros da igualdade. Por exemplo, de "$x + y = x - y$" pode-se inferir "$x - y = x + y$". A propriedade transitiva é aquela que nos afirma que, dadas três expressões designatórias, da igualdade entre a primeira e a segunda e da igualdade entre a segunda e a terceira, pode-se inferir a igualdade entre a primeira e a terceira, a conclusão tendo, como é usual, como hipóteses aquelas de que dependam algum dos dois passos de partida. Por exemplo, de "$x + y = z$" e de "$z = xy$", pode inferir-se "$x + y = xy$".

A terceira observação refere-se a uma "aplicação disfarçada", que é comum aparecer, da propriedade fundamental da igualdade. É aquela que, por exemplo, de "$x = 2$" e de "$y = 3$" nos permite inferir "$x + y = 2 + 3$". Essa inferência tem implícito o passo intermédio "$x + y = x + y$" (propriedade reflexiva), no qual nós subsituímos no segundo membro $x$ por 2 e $y$ por 3.

Observemos também que é válida uma propriedade análoga à propriedade fundamental da igualdade, que referimos atrás, em que, em vez da igualdade entre duas expressões designatórias, partimos duma equivalência entre duas expressões proposicionais e substituímos numa terceira expressão proposicional em que uma delas ocorra, essa ocorrência pela outra expressão proposicional. Por exemplo, da equivalência, por definição,

$$(x \neq y) \Leftrightarrow (\sim x = y)$$

e da propriedade de dupla negação que nos garante que

$$(\sim (\sim x = y)) \Leftrightarrow (x = y)$$

podemos inferir

$$(\sim x \neq y) \Leftrightarrow (x = y).$$

Além disso, a equivalência entre expressões proposicionais tem também propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, análogas às da igualdade entre expressões designatórias.

## Exercícios

9) No quadro dos números reais construir uma demonstração da implicação

$$(x + y = 2 \wedge x - y = 4) \Rightarrow (x = 3 \wedge y = -1).$$

Reparar na relação deste exercício com a resolução de um sistema de duas equações a duas incógnitas. Identificar quais as regras de inferência atrás estudadas que foram utilizadas na demonstração.

10) Mesma questão que no exercício anterior, relativamente à implicação recíproca

$$(x = 3 \wedge y = -1) \Rightarrow (x + y = 2 \wedge x - y = 4).$$

# 6. Algumas observações sobre os métodos experimentais em Matemática

A regra de particularização, que referimos atrás, permite-nos, por exemplo, inferir da expressão proposicional

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x + 1$$

proposições como

$$\begin{aligned}
&(1 + 1)^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1\\
&(17 + 1)^2 = 17^2 + 2 \times 17 + 1\\
&(\pi + 1)^2 = \pi^2 + 2 \times \pi + 1,
\end{aligned}$$

que se obtêm dando valores particulares a $x$. Pelo contrário, a verificação de que uma dada expressão proposicional fica verdadeira quando se atribuem muitos valores diferentes às variáveis (por outras palavras, quando se fazem muitas experiências) não serve, em Matemática, como uma verificação de que a expressão proposicional seja universal. Este é um ponto em que a Matemática se distingue das ciências experimentais.

Não quer isto dizer que o método experimental não tenha um papel muito importante em Matemática, como método que nos auxilia a fazer conjecturas e a acreditar suficientemente nelas para achar que temos possibilidade de as demonstrar. Estas, no entanto, só ganham o estatuto de verdades matemáticas quando são provadas de modo correcto.

Um exemplo clássico das limitações do método experimental em Matemática é a “prova experimental” da expressão proposicional, com uma variável cujo domínio são os inteiros maiores ou iguais a 0,

$$n^2 - n + 41 \text{ é primo.}$$

Podemos fazer muitas experiências e ficar convencidos de que aquela expressão é universal. De facto, para os valores de $n$ entre 0 e 40 obtemos uma proposição verdadeira. Mas para $n = 41$ já a proposição fica falsa o que, do ponto de vista matemático, é suficiente para garantir que a expressão proposicional, ao contrário do que parecia, não é universal. A utililização de experiências em Matemática como método de descoberta não é nova mas está hoje muito facilitada e popularizada graças à existência meios automáticos de cálculo, calculadoras programáveis e computadores, que permitem realizar grande número de experiências em pouco tempo.

As experiências atrás descritas foram feitas num computador, com a ajuda do programa MAPLE V. Depois de entrar as duas ordens

```
f:=n->[n,isprime(n^2-n+41)]:
seq(f(n),n=0..80);
```

o programa forneceu a resposta

```
[0,true],[1,true],[2,true],[3,true],[4,true],[5,true],
[6,true],[7,true],[8,true],[9,true],[10,true],
[11,true],[12,true],[13,true],[14,true],[15,true],
[16,true],[17,true],[18,true],[19,true],[20,true],
[21,true],[22,true],[23,true],[24,true],[25,true],
[26,true],[27,true],[28,true],[29,true],[30,true],
[31,true],[32,true],[33,true],[34,true],[35,true],
[36,true],[37,true],[38,true],[39,true],[40,true],
[41,false],[42,false],[43,true],[44,true],[45,false],
[46,true],[47,true],[48,true],[49,true],[50,false],
[51,true],[52,true],[53,true],[54,true],[55,true],
[56,true],[57,false],[58,true],[59,true],[60,true],
[61,true],[62,true],[63,true],[64,true],[65,true],
[66,false],[67,true],[68,true],[69,true],[70,true],
[71,true],[72,true],[73,true],[74,true],[75,true],
[76,true],[77,false],[78,true],[79,true],[80,true]
```

Do exame desta resposta ressalta que $41$ é o primeiro valor de $n$ para o qual obtemos uma proposição falsa. Se nos limitarmos a observar a resposta do computador não se pode dizer que isso seja uma actividade essencialmente matemática. Sê-lo-á um pouco mais se nos perguntarmos se era previsível que a expressão proposicional não podia ser universal e que $41$ devia ser um contraexemplo. De facto era-o, uma vez que substituindo $n$ por $41$ em $n^2 - n + 41$ se constata imediatamente que ficamos com três parcelas múltiplas de $41$, e portanto com um múltiplo de $41$ que, sendo diferente de $41$, não pode ser primo.

Mas a experimentação em Matemática pode ir mais longe e levar-nos a formar novas conjecturas. Se isolarmos na lista anterior os valores de $n$ que tornam a proposição falsa é possível que reparemos que podem ser escritos na forma

$$\begin{array}{lll} 41 = 41 + 0 & 42 = 41 + 1 & 45 = 41 + 4 \\ 50 = 41 + 9 & 57 = 41 + 16 & 66 = 41 + 25 \\ 77 = 41 + 36 & & \end{array}$$

caso em que seremos decerto levados a formular uma nova conjectura, nomeadamente que os valores de $n$ para os quais $n^2 - n + 41$ não é primo são exactamente os que são soma de $41$ com um quadrado perfeito; em linguagem simbólica,

$$(n^2 - n + 41 \text{ não é primo}) \Leftrightarrow (\underset{p}{\exists}\, n = 41 + p^2).$$

Se essa conjectura fosse correcta, o próximo valor de $n$ para o qual $n^2 - n + 41$ não é primo seria $41 + 49 = 90$. Ora, prolongando mais longe a nossa experiência, com a ordem

```
seq(f(n),n=81..100);
```

obtemos mais um pouco da lista

```
[81,true],[82,false],[83,false],[84,true],[85,false],
[86,true],[87,true],[88,false],[89,true],[90,false],
[91,true],[92,false],[93,true],[94,true],[95,true],
[96,true],[97,false],[98,true],[99,true],[100,true]
```

e constatamos que, apesar de, para $n = 90$, $n^2 - n + 41$ não ser primo, há outros valores de $n$ antes desse para os quais isso acontece, nomeadamente os valores $82$, $83$, $85$ e $88$. Mais uma vez tivémos azar com a nossa conjectura, mas isso não quer dizer que devamos desistir de as fazer. A única coisa que podemos ainda ter esperança de salvar é uma conjectura mais fraca, nomeadamente a implicação

$$(\underset{p}{\exists}\, n = 41 + p^2) \Rightarrow (n^2 - n + 41 \text{ não é primo}).$$

Já sabemos que essa implicação é verdadeira para os valores de $n$ resultantes de valores de $p$ entre $0$ e $7$ e podemos testar o que se passa para mais alguns valores de $p$, dando a ordem

```
seq(f(41+p^2),p=8..20);
```

e obtendo como resposta a lista

```
[105,false],[122,false],[141,false],[162,false],[185,false],
[210,false],[237,false],[266,false],[297,false],[330,false],
[365,false],[402,false],[441,false]
```

Finalmente parece que começamos a ter sorte com as nossas conjecturas… ou talvez não. Se for como das vezes anteriores, quando fizermos mais uma experiência pode ser que dê asneira… E mesmo que não dê, como é que podemos ter a certeza que não é exactamente depois da nossa última paragem que vem o contraexemplo? Talvez seja uma boa ideia lembrarmo-nos que estamos a trabalhar em Matemática e que talvez a matemática que já conhecemos nos permita dar uma resposta afirmativa que não dependa de qualquer experiência. Recapitulando, o que queremos é garantir, sem margens para dúvidas, é que, se

$$n = 41 + p^2,$$

então o número

$$n^2 - n + 41$$

não é primo. Ora, substituindo $n$ por $41 + p^2$ na expressão anterior, obtemos

$$(41 + p^2)^2 - (41 + p^2) + 41 = (41 + p^2)^2 - p^2$$

que é uma diferença de dois quadrados e portanto, pela fórmula bem conhecida, pode ser decomposto num produto de dois factores

$$(41 + p^2)^2 - p^2 = (41 + p^2 + p) \times (41 + p^2 - p).$$

Uma vez que cada um destes factores é maior ou igual 41, em particular não é 1, fica explicado porque é que aqueles números não podem ser primos.

## Exercícios

11) Do mesmo modo que verificámos atrás que havia uma razão simples que explicava porque é que, substituindo $n$ por 41, $n^2 - n + 41$ não era primo, encontrar um explicação também simples da razão por que a substituição de $n$ por 82 também conduz a um valor que não é primo.

12) Dos dados registados atrás, fornecidos pelo computador, ressalta que os valores de $n$ até 100 para os quais $n^2 - n + 41$ não é primo e que não são soma de 41 com um quadrado perfeito são

$$82 \quad 83 \quad 85 \quad 88 \quad 92 \quad 97\,.$$

a) Será capaz de conjecturar quais os próximos valores que aparecem nesta sequência se a prolongarmos para além de 100?[20]

[20]É possível dar uma regra que define o modo como os termos vão aparecendo nesta sequência e mostrar que estes conduzem a um valor para $n^2 - n + 41$ que não é primo. A justificação é, no entanto, demasiado longa para caber nesta margem…

b) Será capaz de encontrar um valor de $n$ que não apareça na sequência anterior, nem na sequência das somas de $41$ com quadrados perfeitos, e para o qual seja fácil prever que $n^2 - n + 41$ não é primo?

## 7. Mais exemplos de raciocínio matemático

Quando, a propósito do primeiro exemplo de raciocínio, falámos das regras de conjunção, explicámos que essas regras permitiam, tanto partir de uma conjunção de duas expressões proposicionais para chegar a qualquer destas, quer partir de duas expressões proposicionais, para chegar à respectiva conjunção. Desse ponto de vista esses regras podem ser utilizadas quer quando chegámos a uma conjunção e queremos tirar partido dela, quer quando queremos tentar chegar a uma conjunção.

Já para trabalhar com uma disjunção de duas expressões proposicionais, as coisas não parecem tão simples. A dificuldade não está em provar uma disjunção: Se nos lembrarmos que a disjunção de duas proposições é verdadeira desde que pelo menos uma delas o seja, independentemente do que aconteça com a outra, vemos que de uma expressão proposicional podemos sempre deduzir a disjunção dessa expressão proposicional com outra qualquer[21].

Por exemplo, se soubermos que "$x > 5$", podemos inferir daí que se tem também "$x \geq 5$" que, recordemo-lo, quer dizer o mesmo que "$x > 5 \vee x = 5$".

Podemos assim dizer:

**Regra de disjunção:** Se um passo de uma demonstração for uma certa expressão proposicional, podemos inferir daí outro passo, formado pela disjunção daquela com outra expressão proposicional. O novo passo vai depender das hipóteses de que já dependesse o passo de partida.

O problema está em perceber que partido podemos tirar de um passo de uma demonstração que seja uma disjunção de duas expressões. Decerto não podemos inferir nenhuma delas, porque bastava a outra ser verdadeira. O exemplo que examinamos em seguida ilustra um processo típico de tirar partido de um passo que é uma disjunção.

**Exemplo 2.** O objectivo é demonstrar, no quadro dos números reais, a expressão proposicional

$$\text{Se } x > 1 \text{ ou } x < -1, \text{ então } x^2 > 1.$$

A demonstração, em linguagem corrente, embora um pouco mais explicada do que é usual, poderia ser feita do seguinte modo:

Suponhamos que $x > 1$ ou $x < -1$.

[21] Embora tenhamos tentações de perguntar se isso poderá servir para alguma coisa… Mas, de facto, há situações em que isso é útil.

No caso em que $x > 1$:

Tem-se também $x > 0$,

donde $x \times x > 1 \times x$,

isto é, $x^2 > x$,

donde, pela propriedade transitiva, $x^2 > 1$.

No caso em que $x < -1$:

Tem-se $-x > 1$ (multiplicámos os dois membros por $-1$, que é negativo),

donde, como no caso anterior, $(-x)^2 > 1$,

ou seja, $x^2 > 1$.

Como, quer no caso em que $x > 1$, quer naquele em que $x < -1$, concluímos que $x^2 > 1$, ficou provado o resultado pretendido. □

Tal como fizémos com o exemplo 1, vamos agora esquematizar a demonstração precedente num quadro em que escrevemos os diferentes passos da demonstração, referenciados por um número, com indicação, numa segunda coluna, das hipóteses associadas a cada passo, quando as houver. Acrescentamos ainda uma terceira coluna onde indicamos, para cada passo deduzido por aplicação de uma regra de inferência quais os passos de onde ele foi deduzido. Os dois passos que começam com as palavras "No caso em que…" vão ser também introduções de hipóteses e a razão porque é costume preferir esta formulação ao habitual "Suponhamos que…" é a de se pretender dar uma pista sobre o objectivo com que são introduzidos.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $x > 1$ ou $x < -1$ | (1) | |
| 2. $x > 1$ | (2) | |
| 3. $x > 0$ | (2) | de 2 |
| 4. $x \times x > 1 \times x$ | (2) | de 2 e 3 |
| 5. $x^2 > x$ | (2) | de 4 |
| 6. $x^2 > 1$ | (2) | de 2 e 5 |
| 7. $x < -1$ | (7) | |
| 8. $-x > 1$ | (7) | de 7 |
| … | … | … |
| 9. $(-x)^2 > 1$ | (7) | de 8 |
| 10. $x^2 > 1$ | (7) | de 9 |
| 11. $x^2 > 1$ | (1) | de 1, 6 e 10 |
| 12. Se $x > 1$ ou $x < -1$, então $x^2 > 1$ | | de 11 |

Tal como já acontecia no exemplo 1, e como é frequente ser feito na prática, alguns passos intermédios foram omitidos, na presunção que o destinatário os conseguirá completar sem dificuldade se assim o desejar. Repare-se que os passos 2 e 7 não foram deduzidos de 1, nem o poderiam ter sido, uma vez que duma disjunção não se pode deduzir nenhuma das duas expressões proposicionais que a formam. Cada um desses passos é assim uma introdução de hipótese e, por isso, depende dele mesmo como hipótese. O modo de inferir os passos 3 a 6 não merece comentários, por se tratar essencialmente de inferências do mesmo tipo que as examinadas no caso do exemplo 1. A passagem do passo 8 para o passo 9 é uma adaptação evidente do caminho que levou do passo 2 ao passo 6 e, por isso, foram omitidos mais passos intermédios com a indicação "como no caso anterior", na demonstração em linguagem corrente. A passagem do passo 9 para o passo 10 é uma consequência da igualdade conhecida $(-x)^2 = x^2$. A grande novidade, que nos levou a apresentar este exemplo, é o modo como se obteve o passo 11.

A primeira coisa que pode parecer estranha é a razão de ser de tanto alarido à volta do passo 11, quando a respectiva expressão proposicional já tinha aparecido antes duas vezes. A explicação é que o que é importante num passo duma demonstração não é só a expressão proposicional que constitui esse passo mas são também as hipóteses de que esse passo está a depender. O expressão "$x^2 > 1$" já tinha aparecido anteriormente nos passos 6 e 10, no primeiro caso com a hipótese "$x > 1$" e no segundo caso com a hipótese "$x < -1$" e o que foi importante foi poder concluir daí que a mesma expressão é ainda válida sem precisar de nenhuma das hipóteses "$x > 1$" e "$x < -1$", pelo facto de termos também a disjunção "$x > 1$ ou $x < -1$" dessas duas hipóteses, como passo anterior. A expressão "$x^2 > 1$" no passo 11, ainda depende de uma hipótese, a hipótese "$x > 1$ ou $x < -1$", mas isso deve-se a que a disjunção, no passo 1, já dependia dessa hipótese; de qualquer modo, essa dependência não prejdica o caminho para o passo 12, que é o que se pretende provar, uma vez que aplicamos nessa passagem o método da hipótese auxiliar.

O processo que utilizámos atrás para passar dos passos 1, 6 e 10 para o passo 11 é o chamado *método da hipótese alternativa* e é ele que é utilizado muitas vezes quando se pretande chegar a uma certa conclusão a partir de um passo que é a disjunção de duas expressões proposicionais: Tenta-se chegar a essa conclusão a partir de uma das expressões proposicionais e depois chegar de novo à mesma conclusão a partir da outra expressão proposicional. Mais precisamente, podemos enunciar a regra de inferência

**Método da hipótese alternativa:** Se um passo de uma demonstração for a disjunção de duas expressões proposicionais e se conseguirmos chegar a uma mesma conclusão num segundo passo, com a primeira expressão proposicional como hipótese, e de novo num terceiro passo, com a segunda expressão proposicional como hipótese (*as hipóteses alternativas*), então podemos concluir essa conclusão sem nenhuma dessas duas hipóteses. A conclusão final terá apenas como hipóteses aquelas de que dependesse a disjunção de partida e outras que eventualmente acompanhassem as hipóteses alternativas nos segundo e terceiro passos referidos.

Em muitos casos a disjunção com a qual se inicia o método da hipótese alternativa envolve uma expressão proposicional e a sua negação (uma tal disjunção sempre universal como facilmente se reconhece). É o que acontece no exemplo seguinte:

**Exemplo 3.** Pretendemos mostrar, no quadro dos números reais, que é universal a expressão proposicional

$$x > 5 \vee x < 7.$$

A demonstração podia ser feita, em linguagem corrente, do seguinte modo:

Ou $x$ é maior que 5 ou $x$ não é maior que 5.
No caso em que $x > 5$
tem-se também $x > 5 \vee x < 7$
No caso em que $x$ não é maior que 5
tem-se $x \leq 5$
donde, como $5 < 7$,
tem-se $x < 7$
portanto também $x > 5 \vee x < 7$.
E qualquer dos casos, chegámos assim a $x > 5 \vee x < 7$. □

Representemos, na forma esquematizada que utilizámos atrás, a demonstração anterior[22]:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $x > 5 \vee ( \sim x > 5)$ | | |
| 2. $x > 5$ | (2) | |
| 3. $x > 5 \vee x < 7$ | (2) | de 2 |
| 4. $\sim x > 5$ | (4) | |
| 5. $x \leq 5$ | (4) | de 4 |
| 6. $5 < 7$ | | |
| 7. $x < 7$ | (4) | de 5 e 6 |
| 8. $x > 5 \vee x < 7$ | (4) | de 7 |
| 9. $x > 5 \vee x < 7$ | | de 1, 3 e 8 |

Reparemos que o método da hipótese alternativa foi o que nos permitiu concluir 9 a partir de 1, 3 e 8 e que a regra de disjunção foi utilizada duas vezes, nas passagens do passo 2 para o passo 3 e na do passo 7 para o passo 8.

Reparemos também que uma das coisas que faz com que construir uma demonstração como esta não seja um processo meramente mecânico é o facto de para a conseguirmos desenvolver ter sido necessário descobrir qual a boa hipótese alternativa que interessava para atingir o resultado. A capacidade de fazer uma tal escolha faz parte da intuição matemática que só se adquire através de muito trabalho prático e de muitas tentativas de construirmos nós mesmos demonstrações. Apresentamos em seguida mais um exemplo em que a boa escolha da hipótese alternativa foi fundamental para construir uma demonstração simples.

[22]Quando correntemente se faz uma demonstração, não é normal recorrer à forma esquematizada e usamos simplesmente a linguagem corrente. Como já tem acontecido mais vezes ao longo da nossa exposição, a versão esquematizada é especialmente importante quando queremos compreender melhor a utilização das diferentes regras de inferência.

**Exemplo 4.** Continuemos a trabalhar no quadro dos números reais e reparemos que o *módulo*, ou *valor absoluto*, $|z|$, de um número real $z$, pode ser caracterizado como sendo o maior dos dois números $z$ e $-z$ (pensar no que acontece no caso em que $z \geq 0$ e naquele em que $z \leq 0$). Podemos assim supor conhecidas como universais as seguintes expressões proposicionais

$$|z| = z \vee |z| = -z, \qquad\qquad z \leq |z| \wedge -z \leq |z|.$$

O que pretendemos neste exemplo é examinar uma demonstração da conhecida propriedade

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Essa demonstração podia ser relatada, em linguagem corrente, do seguinte modo:

Tem-se $|x+y| = x+y$ ou $|x+y| = -(x+y)$.
No caso em que $|x+y| = x+y$,
podemos atender a que $x \leq |x|$
e a que $y \leq |y|$
para deduzir que $x+y \leq |x| + |y|$,
portanto $|x+y| \leq |x| + |y|$.
No caso em que $|x+y| = -(x+y)$,
podemos atender a que $-x \leq |x|$
e a que $-y \leq |y|$
para deduzir que $-(x+y) \leq |x| + |y|$,
portanto $|x+y| \leq |x| + |y|$.
Em qualquer dos casos temos assim $|x+y| \leq |x| + |y|$. $\square$

O "segredo" do sucesso e simplicidade da demonstração precedente foi a descoberta de que a boa alternativa a apresentar era "$|x+y| = x+y$ ou $|x+y| = -(x+y)$". Podíamos ter tentado começar com a alternativa "$|x| = x$ ou $|x| = -x$", subdividindo depois cada caso com a alternativa "$|y| = y$ ou $|y| = -y$" e também acabaríamos por chegar ao resultado, mas com uma demonstração bem mais complexa. Aqui, como noutras situações da nossa vida, só com muito treino é que se consegue sucesso.

Vamos agora retomar a expressão proposicional que examinámos no exemplo 3 para exemplificar um novo método de demonstração, também muito utilizado em Matemática, o *método de redução ao absurdo*.

**Exemplo 5.** Vamos, mais uma vez, apresentar uma demonstração da expressão proposicional

$$x > 5 \vee x < 7.$$

A demonstração pode ser desenvolvida do seguinte modo:

Suponhamos que não era verdade que $x > 5 \vee x < 7$.
Tem-se assim $(\sim x > 5) \wedge (\sim x < 7)$,
portanto $5 \geq x$
e $x \geq 7$

donde, pela propriedade transitiva, $5 \geq 7$,
o que é absurdo, uma vez que sabemos que não é verdade que $5 \geq 7$.
Podemos assim concluir que $x > 5 \vee x < 7$. □

Esquematizando a demonstração anterior do modo habitual, temos:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\sim (x > 5 \vee x < 7)$ | (1) | |
| 2. $(\sim x > 5) \wedge (\sim x < 7)$ | (1) | de 1 |
| 3. $5 \geq x$ | (1) | de 2 |
| 4. $x \geq 7$ | (1) | de 2 |
| 5. $5 \geq 7$ | (1) | de 3 e 4 |
| 6. $\sim (5 \geq 7)$ | | |
| 7. $x > 5 \vee x < 7$ | | de 5 e 6 |

O passo 1 foi a introdução de uma hipótese; no método de redução ao absurdo começa-se por introduzir como hipótese a negação do que queremos provar. O passo 2 resultou do passo 1 por utilização das primeiras leis de de Morgan. Os passos 3 e 4 resultaram ambos do passo 2 por utilização das regras de conjunção e tendo em conta equivalências bem conhecidas. O passo 5 resultou dos passos 3 e 4 tendo em conta a transitivaidade conhecida da relação $\geq$. O passo 6 é um resultado conhecido. O passo 7 é obtido a partir dos passos 5 e 6 (o *absurdo* ou a *contradição*) pelo método de redução ao absurdo. No raciocínio diz-se que se chegou a uma contradição se, sob certas hipóteses, se chega simultaneamente a uma expressão e à sua negação. A regra de inferência que utilizámos pode assim ser enunciada:

**Método de redução ao absurdo.** Suponhamos que numa demonstração se chega a dois passos, dos quais um é a negação do outro (o *absurdo* ou *contradição*), onde um, ou ambos os passos dependem de uma hipótese que é a negação de uma certa expressão proposicional. Podemos então concluir essa expressão proposicional daqueles dois passos.

Em geral, se os dois passos dependerem também de outras hipóteses, a expressão proposicional que se conclui depende também dessas outras hipóteses.

Existe um outro método de raciocínio, que por vezes é confundido erroneamente com o método de redução ao absurdo, e que se costuma dar o nome de *método de passagem ao contrarrecíproco*. Tal como o método directo, o objectivo é provar propriedades que tenham a forma de uma implicação, ou seja, que tenham uma hipótese e uma tese, mas enquanto que no método directo se começa por supor a hipótese e se chega, a partir daí, à tese, no método de passagem ao contrarrecíproco começa-se por supor a negação da tese e chega-se, a partir daí, à negação da hipótese. A razão porque este método funciona é simplesmente a de que podemos aplicar o método usual da hipótese auxiliar e tirar em seguida partido do facto, já referido atrás, de uma implicação e a sua contrarrecíproca terem o mesmo valor de verdade. Resumindo:

**Método de passagem ao contrarrecíproco:** Para provarmos uma implicação entre duas expressões, basta partirmos de um passo anterior que seja a negação do antecedente, tendo a negação do consequente como hipótese.
Em geral se esse passo anterior depender também de outras hipóteses, a implicação deduzida vai depender dessas mesmas hipóteses.

Vejamos um exemplo de uma demonstração que se pode fazer comodamente com a ajuda do método de passagem ao contrarrecíproco.

**Exemplo 6.** Vamos demonstrar a expressão proposicional

$$x^2 < 1 \Rightarrow x < 1,$$

utilizando o método de passagem ao contrarrecíproco.[23] A demonstração pode ser descrita em linguagem corrente do seguinte modo:
Suponhamos que não se tinha $x < 1$.
Tem-se assim $x \geq 1$,
portanto também $x > 0$,
donde por uma propriedade conhecida da multiplicação, $x \times x \geq 1 \times x$,
isto é, $x^2 \geq x$.
Pela propriedade transitiva, segue-se que $x^2 \geq 1$,
pelo que não se tem $x^2 < 1$
e a implicação pretendida resulta por aplicação do método de passagem ao contrarrecíproco. □

Dentro do esquema habitual de esquematizar a demonstração, poderíamos escrever:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\sim x < 1$ | (1) | |
| 2. $x \geq 1$ | (1) | de 1 |
| 3. $x > 0$ | (1) | de 2 |
| 4. $x \times x \geq 1 \times x$ | (1) | de 2 e 3 |
| 5. $x^2 \geq x$ | (1) | de 4 |
| 6. $x^2 \geq 1$ | (1) | de 2 e 5 |
| 7. $\sim x^2 < 1$ | (1) | de 6 |
| 8. $x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$ | | de 1 e 7 |

[23]Será instrutivo o estudante tentar fazer esta demonstração pelo método directo para ver onde vai encontrar dificuldades. Cuidado, se o método que seguiu puder ser adaptado para demonstrar a implicação "$x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$" então cometeu decerto algum erro, porque esta última não é válida (pensar no contraexemplo que vem de substituir $x$ por $-2$).

Voltemos a insistir que os métodos de redução ao absurdo e de passagem ao contrarrecíproco são métodos distintos: Em primeiro lugar, se a expressão proposicional a demonstrar não tem a forma de uma implicação, como acontecia com o exemplo 5, nem sequer faz sentido falar de método de passagem ao contrarrecíproco e o método de redução ao absurdo é um método que pode ser tentado; em segundo lugar, mesmo quando o que queremos demonstrar é uma implicação, no método de passagem ao contrarrecíproco partimos da negação da tese para chegar à negação da hipótese e no método de redução ao absurdo partimos da negação da implicação e tentamos chegar a uma contradição, tirando partido frequentemente do facto de da negação da implicação se poder deduzir, como já referimos, o antecedente (ou seja, a hipótese) e a negação do consequente (ou seja a negação da tese). A única coisa que faz sentido dizer sobre uma relação entre os dois métodos é que é muito fácil, embora de pouca utilidade, transformar uma demonstração por passagem ao contrarrecíproco numa demonstração por redução ao absurdo.

## Exercícios

13) No quadro dos números reais, demonstrar a expressão proposicional

$$(x \leq 1 \wedge x \geq -1) \Rightarrow x^2 \leq 1.$$

**Sugestão:** Além do método directo, utilizar o método da hipótese alternativa para tratar separadamente os casos em que $x \geq 0$ e em que $x \leq 0$.

14) No quadro dos números reais, demonstrar:
a) A implicação

$$y^2 \leq 1 \Rightarrow y \leq 1.$$

b) Utilizando a conclusão da alínea a), a implicação recíproca da do exercício 13:

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow (x \leq 1 \wedge x \geq -1).$$

15) No quadro dos números reais, e utilizando a conclusão do exercício 13, demonstrar a expressão proposicional

$$x^2 > 1 \Rightarrow (x > 1 \vee x < -1).$$

16) No quadro dos números naturais demonstrar a expressão proposicional

$$m \times n \geq 1000 \Rightarrow (m \geq 10 \vee n \geq 100).$$

## 8. Alguns raciocínios envolvendo quantificadores

Até agora todos os exemplos de raciocíno que apresentámos não envolveram expressões com quantificadores. Vamos agora apresentar alguns exemplos muito simples de raciocínio em que as expressões com quantificadores vão existir e aproveitar para descobrir quais as regras inferência que intervêm na dedução de expressões desse tipo.

**Exemplo 7**: Pretendemos demonstrar a proposição muito simples:

$$\underset{x}{\exists}\, x > 5.$$

A demonstração resume-se a dois passos:

Sabemos que $6 > 5$.

Logo, $\underset{x}{\exists}\, x > 5$. □

É só isto…, para provar que alguma coisa existe basta arranjarmos um exemplo dessa coisa… O próximo exemplo é uma pequena variante deste, em que a novidade é que existe outra variável além da variável quantificada com o quantificador existencial.

**Exemplo 8**: Pretendemos provar a expressão proposicional

$$\underset{x}{\exists}\, x > y,$$

que tem $y$ como única variável livre, ou seja, queremos mostrar que, quando se substitui $y$ por um termo qualquer, obtemos uma proposição verdadeira. No caso em que tínhamos $5$ no lugar de $y$ já vimos atrás o que fazer; se em vez de $5$ tivéssemos $8$, a demonstração anterior era facilmente adaptada, bastava partir de $9 > 8$, no lugar de $6 > 5$. Pensando um pouco vemos que para qualquer termo que se tivesse no lugar de $5$ se arranjava uma demonstração do mesmo tipo, bastava, em vez de $6$ utilizar esse termo somado com uma unidade. A demonstração do resultado geral, corresponde a isto que demorámos tanto a dizer:

Sabemos que $y + 1 > y$.

Logo, $\underset{x}{\exists}\, x > y$. □

A regra de inferência que utilizámos nos dois exemplos anteriores é a chamada generalização existencial:

**Regra de generalização existencial**: Se uma afirmação é verdadeira para um valor particular duma variável, então pode dizer-se que existe um valor da variável para o qual ela é verdadeira. Mais precisamente:

Para se inferir uma expressão proposicional existencial, basta partir de um passo anterior que consista nessa expressão sem o quantificador e com a variável quantificada substituída por um termo ou expressão designatória. Essa expressão designatória pode ter como variáveis algumas das variáveis não quantificadas na expressão a inferir.

A expressão que inferimos vai depender das mesmas hipóteses de que já dependesse o passo de partida.

A regra anterior explica como poderemos proceder para inferir uma expressão proposicional existencial. Será também útil ter um processo que nos permite deduzir alguma coisa de um passo deste tipo. Vejamos um exemplo de uma situação em que isso é feito.

**Exemplo 9:** Neste exemplo trabalhamos no quadro dos números naturais e lembramos a definição do símbolo predicativo "… é par":

$$n \text{ é par} \Leftrightarrow \underset{p}{\exists}\, n = 2 \times p.$$

O ojectivo é demonstrar que o produto de um número qualquer por um número par é sempre um número par; simbólicamente:

$$m \text{ é par} \Rightarrow m \times n \text{ é par}.$$

A demonstração pode ser exposta do seguinte modo:

1. Suponhamos que $m$ é par.
2. Por definição, existe $p$ tal que $m = 2 \times p$.
3. Seja $p_0$ um $p$ nessas condições.
4. Tem-se assim $m = 2 \times p_0$
5. e portanto $m \times n = (2 \times p_0) \times n$,
6. ou seja, $m \times n = 2 \times (p_0 \times n)$.
7. Podemos concluir daqui que $\underset{p}{\exists}\, m \times n = 2 \times p$,
8. ou seja, por definição, $m \times n$ é par.
9. Ficou assim provada a implicação pretendida. □

O primeiro passo da demonstração precedente que merece uma explicação é o passo 3, exactamente aquele que tira partido da expressão proposicional existencial. O que se fez foi fazer uma definição auxiliar de $p_0$ dizendo que $p_0$ é igual a um $p$ tal que $m = 2 \times p$, onde o segundo membro da igualdade é obtido por meio do operador de explicitação indefinida referido na página 29. O passo 4 é simplesmente a propriedade fundamental do operador de explicitação indefinida que afirma simplesmente que "um elemento escolhido de entre os que verificam uma dada propriedade, verifica essa propriedade". O passo 7 é obtido pela regra de generalização existencial e os restantes passos não merecem comentário especial por serem dum tipo que já encontrámos muitas vezes.

Voltando a examinar a definição auxiliar, que tem a forma

$$p_0 = (\text{um } p \text{ tal que } m = 2 \times p),$$

o primeiro membro desta igualdade parece sugerir que o que se definiu foi uma constante $p_0$. No entanto, olhando para o segundo membro, vemos que este não é um termo, mas sim uma expressão designatória, tendo $m$ como variável livre. De acordo com o que dissémos atrás, ao falar de definições, uma tal expressão designatória não pode ser utilizada para definir uma constante, mas sim um símbolo funcional de ordem 1. Quando escrevemos $p_0$ deveríamos assim ter escrito $p_0(m)$, dizendo, em vez de "seja $p_0$ um $p$ tal que…", "seja $p_0(m)$ um $p$ tal que…". Escrever simplesmente $p_0$, como fizémos, é um abuso de linguagem que é usual fazer em Matemática e que é inócuo deste que tenhamos bem presente o que deveria estar escrito no seu lugar (às vezes lembra-se isso dizendo uma frase do tipo "repare-se que $p_0$ depende de $m$). Vejamos como ficaria escrita a demonstração precedente, sem o abuso de linguagem referido e usando o esquema habitual em três colunas.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $m$ é par | (1) | |
| 2. $\exists_p m = 2 \times p$ | (1) | de 1 |
| 3. $p_0(m) = (\text{um } p \text{ tal que } m = 2 \times p)$ | (1) | de 2 |
| 4. $m = 2 \times p_0(m)$ | (1) | de 3 |
| 5. $m \times n = (2 \times p_0(m)) \times n$ | (1) | de 4 |
| 6. $m \times n = 2 \times (p_0(m) \times n)$ | (1) | de 5 |
| 7. $\exists_p m \times n = 2 \times p$ | (1) | de 6 |
| 8. $m \times n$ é par | (1) | de 7 |
| 9. ($m$ é par) $\Rightarrow$ ($m \times n$ é par) | | de 8 |

Sintetizando o que acabamos de exemplificar, podemos dizer:

> Quando queremos tirar partido de um passo duma demonstração que é uma expressão proposicional existencial, o que se faz, em geral, é definir uma nova constante ou símbolo funcional, utilizando o operador de explicitação indefinida e inferir daí a propriedade fundamental que uma tal definição arrasta.

Depois de examinarmos como é usual proceder com expressões proposicionais existenciais, tanto para tirar partido delas, quando as conhecemos, como para as tentar provar, vejamos o que se pode dizer de análogo relativamente às expressões proposicionais construídas com o quantificador universal.

**Exemplo 10**: No quadro dos números reais, vamos demonstrar a expressão proposicional

$$(\forall_x x \times y = 0) \Rightarrow y = 0,$$

que, em linguagem corrente, seria enunciada “Se um número dá $0$ quando multiplicado por qualquer número, então ele tem que ser $0$”. A demonstração pode ser feita da seguinte maneira:

1. Suponhamos que $\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0$.
2. Em particular, tem-se então $1 \times y = 0$.
3. Mas $1 \times y = y$,
4. logo $y = 0$.
5. Ficou assim provado que $(\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0) \Rightarrow y = 0$. □

No método habitual de esquematizar a demonstração, podemos escrever

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0$ | (1) | |
| 2. $1 \times y = 0$ | (1) | de 1 |
| 3. $1 \times y = y$ | | |
| 4. $y = 0$ | (2) | de 2 e 3 |
| 5. $(\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0) \Rightarrow y = 0$ | | de 4 |

A única passagem que merece alguma atenção, por utilizar uma regra de inferência ainda não examinada, é a do passo 1 para o passo 2.

> **Segunda regra de particularização**:[24] Se uma afirmação é verdadeira qualquer que seja o valor uma variável, então também é verdadeira para os valores particulares da variável. Mais precisamente:
>
> De uma expressão proposicional construída com o quantificador universal pode inferir-se qualquer expressão que se obtenha retirando esse quantificador e substituindo eventualmente a respectiva variável por um termo ou expressão designatória.
>
> O novo passo assim obtido depende ainda, como é habitual, das hipóteses de que dependesse o passo de partida.

**Exemplo 11**: Vamos demonstrar a proposição “Se $y$ é um real arbitrário, então ou $x^2 \times y \geq 0$ para todo o $x$, ou $x^2 \times y \leq 0$ para todo o $x$”, que se pode traduzir, em linguagem simbólica, por

$$\underset{y}{\forall}\, ((\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)).$$

Em linguagem corrente, a demonstração pode-se desenrolar do seguinte modo:

1. Dados $x$ e $y$ quaisquer, ou $y \geq 0$ ou $y \leq 0$.
2. No caso em que $y \geq 0$,
    3. Como $x^2 \geq 0$,
    4. tem-se também $x^2 \times y \geq 0$
    5. donde, como $x$ é qualquer, $\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0$,

[24]Comparar com a regra de particularização referida na página 35.

6. e portanto também $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$.

7. No caso em que $y \leq 0$,

8. Como $x^2 \geq 0$,

9. tem-se a desigualdade oposta $x^2 \times y \leq 0$

10. donde, como $x$ é qualquer, $\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0$,

11. e portanto também $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$.

12. Em qualquer dos casos $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$

13. e portanto, como $y$ é qualquer $\underset{y}{\forall}\, ((\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0))$. $\square$

Na demonstração precedente, para além de termos reencontrado regras de inferência já estudadas, entre as quais o método da hipótese alternativa, encontrámos mais uma, a que nos permitiu chegar aos passos 5, 9 e 13.

**Regra de Generalização**: Se uma afirmação é verdadeira para um valor arbitrário de uma variável, então pode-se dizer que é verdadeira qualquer que seja essa variável[25]. De um modo mais preciso:

De um passo duma demonstração onde uma certa variável aparece livre, podemos inferir a expressão proposicional que se obtém aplicando o quantificador universal nessa variável, desde que a referida variável não figure nas hipóteses desse passo.

O passo que se conclui vai depender das mesmas hipóteses de que já dependia o passo de partida.

A explicação da regra anterior é clara, se uma variável de um certo passo não aparece nas respectivas hipóteses então ela pode ser substituída por um termo arbitrário, e é isso que significa precisamente a validade da expressão obtida com o quantificador universal. Já uma variável que apareça nas hipóteses só pode ser substituída por termos que tornem verdadeiras as hipóteses, o que não legitima que se aplique o quantificador universal. Para melhor reconhecermos a aplicação desta regra na demonstração precedente e para relembrarmos outras regras que já tínhamos estudado, apresentemos de novo essa demonstração

[25]Dito assim não parece nada de muito profundo, e de facto não é…

usando o esquema habitual.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $y \geq 0 \vee y \leq 0$ | | |
| 2. $y \geq 0$ | (2) | |
| 3. $x^2 \geq 0$ | | |
| 4. $x^2 \times y \geq 0$ | (2) | de 2 e 3 |
| 5. $\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0$ | (2) | de 4 |
| 6. $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$ | (2) | de 5 |
| 7. $y \leq 0$ | (7) | |
| 8. $x^2 \geq 0$ [26] | | |
| 9. $x^2 \times y \leq 0$ | (7) | de 7 e 8 |
| 10. $\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0$ | (7) | de 9 |
| 11. $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$ | (7) | de 10 |
| 12. $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$ | | de 1, 6 e 11 |
| 13. $\underset{y}{\forall}\, ((\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0))$ | | de 12 |

Depois de sabermos como fazer raciocínios em que intervêm os quantificadores existencial e universal, resta-nos interrogarmo-nos sobre como trabalhar com o quantificador de existência e unicidade. Como vamos ver, isso não exige mais nenhuma regra de inferência para além das que já estudámos, uma vez que qualquer expressão construída com o quantificador de existência e unicidade é equivalente à conjunção de duas, uma correspondente à existência, e outra correpondente à unicidade, cada uma das quais é do tipo das que já estudámos. Em vez de explicarmos como se procede em geral, talvez seja mais claro limitarmo-nos a apresentar um exemplo elucidativo. Pensemos, por exemplo, na expressão proposicional

$$\underset{x}{\exists^1}\, x^3 = y,$$

com $y$ como variável livre, que exprime o facto de existir um, e um só, $x$ cujo cubo é $y$. Essa expressão pode ser escrita como a conjunção de duas, a primeira correspondendo a garantir a existência, para cada $y$, de um valor a atribuir a $x$ que a torne verdadeira e a segunda correspondendo a garantir que dados dois valores a atribuir a $x$ nessas condições eles devem designar o mesmo objecto. A primeira não é mais do que a expressão obtida com o quantificador existencial "$\underset{x}{\exists^1}\, x^3 = y$". A segunda pode ser expressa pela expressão

[26]Este passo, em rigor, é escusado, uma vez que já apareceu antes, também sem hipóteses. Ele foi repetido com o único objectivo de sublinhar o paralelismo entre o que se faz nas duas hipóteses alternativas.

$$\underset{x,z}{\forall}\, ((x^3 = y \wedge z^3 = y) \Rightarrow x = z)$$

(se $x$ e $z$ verificam a expressão então devem representar o mesmo objecto, o que se traduz por $y = z$). De acordo com a regra de conjunção, para provarmos a expressão "$\underset{x}{\exists^1}\, x^3 = y$", basta provarmos separadamente "$\underset{x}{\exists}\, x^3 = y$" e

$$\underset{x,z}{\forall}\, ((x^3 = y \wedge z^3 = y) \Rightarrow x = z)$$

e, se quisermos tirar partido de "$\underset{x}{\exists^1}\, x^3 = y$", podemos inferir daí aquelas duas expressões.

★ ★ ★ ★

Uma operação que já encontrámos inúmeras vezes foi a de substituir uma variável livre numa certa expressão por um termo ou expressão designatória. Essa operação é, em particular, essencial quando trabalhamos com certas regras de inferência que fazem intervir os quantificadores. É agora oportuno alertar para uma situação em que uma tal substituição pode levantar problemas.

Coloquemo-nos no quadro dos números reais e pensemos, por exemplo, na expressão proposicional universal

$$\underset{y}{\exists}\, x < y.$$

O facto de esta expressão proposicional ser universal corresponde ao facto de, quando substituímos a variável livre $x$ por um termo arbitrário, obtermos uma proposição verdadeira. Por exemplo, substituindo $x$ pelos termos $1$, $\pi$ ou $1000$, obtemos as proposições verdadeiras

$$\underset{y}{\exists}\, 1 < y, \qquad \underset{y}{\exists}\, \pi < y, \qquad \underset{y}{\exists}\, 1000 < y.$$

Talvez com alguma leviandade, considerámos como evidente que, se, em vez de substituirmos $x$ por um termo, substituirmos $x$ por uma expressão designatória, passamos a obter uma nova expressão proposicional universal. A razão parece clara: Se substituirmos, por exemplo, $x$ pela expressão designatória $z + w$, com $z$ e $w$ como variáveis livres, obtemos a expressão proposicional

$$\underset{y}{\exists}\, z + w < y,$$

com $z$ e $w$ como variáveis livres, que é universal, uma vez que, quando substituirmos $z$ e $w$ por termos nesta expressão, por exemplo $5$ e $4$, respectivamente, o resultado "$\underset{y}{\exists}\, 5 + 4 < y$" é o mesmo que se substituíssemos na expressão original $x$ pelo termo "$5 + 4$", que se obtém a partir da expressão designatória pela substituição de $z$ e $w$.

Apesar de a razão de podermos proceder deste modo parecer clara, há uma situação, que importa evitar, em que a substituição funciona mal: Suponhamos, por exemplo que, em vez de substituirmos $x$ pela expressão designatória "$z+w$", subsituímos $x$ pela expressão designatória $z+y$, com $z$ e $y$ como variáveis livres. Obtemos então a expressão proposicional

$$\underset{y}{\exists}\, z+y<y,$$

que já só tem $z$ como variável livre, e que não é universal, como é claro se substituirmos, por exemplo $z$ por 1, obtendo a proposição falsa "$\underset{y}{\exists}\, 1+y<y$". Onde a explicação anterior falha neste caso é no facto de a expressão resultante desta substituição não poder resultar directamente da expressão inicial "$\underset{y}{\exists}\, x<y$" por substituição de $x$ por nenhum termo. O problema apareceu por a expressão designatória "$z+y$" ter uma variável livre $y$, que passou a ficar muda depois dela substituir a variável $x$. Para evitar este tipo de problemas, vamos seguir sempre a seguinte convenção, sobre as substituições permitidas, numa certa expressão, de uma variável por uma expressão designatória:

**Convenção**: Só serão admitidas substituições de uma variável por uma expressão designatória numa certa expressão se não houver variáveis que estejam livres na expressão designatória e passem a ficar mudas depois da substituição.

A convenção precedente é essencial para a validade das regras de inferência estudadas atrás. Por exemplo, de "$\underset{y}{\exists}\, x<y$", que é universal, **não** podemos inferir, por particularização, "$\underset{y}{\exists}\, y+1<y$", que é falsa, e, da proposição verdadeira "$\underset{y}{\forall}\, y<y+1$", **não** podemos inferir, por generalização existencial, a proposição "$\underset{x}{\exists}\underset{y}{\forall}\, y<x$", que é falsa.

## Exercícios

17) No quadro dos números naturais e lembrando a definição

$$n \text{ é múltiplo de } m \Leftrightarrow \underset{p}{\exists}\, n=m\times p,$$

demonstrar os resultados na alíneas seguintes. Em cada caso pode fazer uma demonstração em linguagem corrente ou esquematizada na forma habitual, mas o importante é que saiba reconhecer a aplicação das principais regras de inferência estudadas.

a) $n$ é múltiplo de 1.

b) ($m$ é múltiplo de $n$) $\wedge$ ($n$ é múltiplo de $p$) $\Rightarrow$ ($m$ é múltiplo de $p$)

18) No quadro dos números reais, demonstrar os resultados nas alíneas seguintes. Em cada caso pode fazer uma demonstração em linguagem corrente ou esquematizada na forma habitual, mas o importante é que saiba reconhecer a aplicação das principais regras de inferência estudadas.

a) $\underset{x}{\forall}\,(\underset{y}{\exists}\, y < x)$ (para cada número existe sempre um que é menor que ele).

b) $\sim(\underset{y}{\exists}\,(\underset{x}{\forall}\, y < x))$ (não existe nenhum número que seja menor que todos os números).

c) $(\forall_x\,(x > 0 \Rightarrow y < x)) \Rightarrow y \leq 0$ (se $y$ é menor que todos os números estritamente positivos, então $y \leq 0$). **Sugestão:** Reparar que, se $y > 0$, então $0 < \frac{y}{2} < y$.

d) $\underset{z}{\exists}\,(x \leq z \wedge y \leq z)$ (dados $x$ e $y$ existe sempre um número maior ou igual a ambos). Sugestão: Utilizar o resultado conhecido: $x \leq y \vee y \leq x$.

e) $x \leq y \Rightarrow \underset{z}{\forall}\,(y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ (Se um número é menor ou igual a outro, então todos os números maiores ou iguais ao segundo são também maiores ou iguais ao primeiro).

f) $(\underset{z}{\forall}\,(y \leq z \Rightarrow x \leq z)) \Rightarrow x \leq y$ (Se todos os números maiores ou iguais a $y$ são também maiores ou iguais a $x$, então $x$ é menor ou igual a $y$).

g) $\underset{x}{\exists^1}\, x + 1 = 2$ (Existe um único número que somado com 1 dá 2).

# Bibliografia


J. Sebastião e Silva, *Compêndio de Matemática (Curso Complementar do Ensino Secundário)*, 1º volume, 1º tomo, ed. GEP, Ministério da Educação e Cultura, 1975.

R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Herman, Paris.

J. E. Rubin, *Set Theory for the Mathematician*, Holden-Day, 1967.