INICIAÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL: DEFINIÇÃO DE OBJECTIVOS

Introdução e generalidades. A noção de função é conhecida do ensino básico, mas só agora vai ser utilizada com sistematização. O conceito de função que introduzimos é-nos bastante familiar mas é, apesar de tudo, um conceito bastante abstracto, baseado na noção intuitiva de correspondência entre elementos de dois conjuntos de natureza não especificada. Não deverá ser difícil fazê-lo interiorizar pelos alunos a partir de uma certa gama de exemplos onde as funções reais de variável real devem ter um papel de relevo (pois são elas o objecto cujo estudo agora se inicia) mas não exclusivo, sendo útil mencionar exemplos que evoquem matéria conhecida do capítulo de Geometria. Os alunos devem ficar com a ideia clara de que o conhecimento de uma função está assegurado quando estamos na posse do *domínio* e da *regra* que estabelece o modo de associar a elementos desse domínio elementos de outro conjunto. (Este outro conjunto é mencionado implicitamente quando se descreve a regra...) Devem ser confrontados desde o início em casos muito simples (função afim, x^2...) com o uso da expressão designatória ou expressão analítica para obter não só valores numéricos concretos das funções em jogo, mas também expressões como $f(2x)$, $f(z+50)$... Devem interiorizar o papel das variáveis independente e dependente, ficando claro que somos livres de escolher os símbolos a usar para uma ou outra. Devem saber usar a expressão "(a variável) y é função de (a variável) x" em casos concretos. Devem saber que podem utilizar, ao referir-se a funções, a expressão "a função $y = f(x)$" ou "a função $f(x)$", com consciência de que estão a cometer um (inocente e por vezes conveniente) abuso de linguagem, já que seria mais correcto dizer "a função f".

Gráfico e simetrias Os alunos vão ser confrontados com a noção abstracta de *par ordenado*, o que não deve ser um choque porque estão habituados à utilização de $\mathbf{R}^2$, que é o caso verdadeiramente interessante e importante no contexto. O que distingue o par da simples menção de um conjunto de dois elementos é que está explícito que a estes dois elementos foram conferidos lugares: primeiro e segundo. Deve passar a ideia de que o conhecimento de uma função é o conhecimento do seu gráfico. Deve-lhes ser dito que os esquemas visuais que produzimos numa folha de papel ou numa máquina são representações do gráfico ou de parte dele, não havendo inconveniente em chamar gráfico á própria representação. Os primeiros exemplos de simetria (funções pares e ímpares) devem ser compreendidos tanto pela caracterização analítica como pela correspondente propriedade do gráfico. Será interessante levar os estudantes a reconhecer que as duas simetrias aqui envolvidas são movimentos rígidos do plano.

Funções afins Trata-se de uma revisão de matéria dada. A mensagem mais importante a fazer passar é a constância do cociente dos acréscimos.

Função associada à proporcionalidade inversa Revisão, a fim de disponibilizar este tipo de função para exemplos. É também ocasião para sublinhar que só os números não nulos têm inverso, que o inverso de um número "grande" é "pequeno" e vice-versa.

Raízes, contradomínio, restrição

Estes conceitos são facilmente descritos em termos genéricos, mas é bom trabalhá-los em casos concretos com as poucas funções disponíveis. Os alunos devem saber como, a partir de um gráfico, identificar raizes e elementos do contradomínio. Devem ficar também com a ideia de que para passar a uma restrição basta "apagar" (ignorar) parte do gráfico.

Funções crescentes e decrescentes. Máximos e mínimos As noções de *máximo* e *mínimo* são simples e envolvem apenas o conhecimento da relação de ordem entre números. São mais delicadas as de *máximo relativo* e *mínimo relativo* mas reduzem-se às anteriores, bastando para isso considerar uma restrição *adequada*. Pode ser útil utilizar o termo *vizinhança de...* (que não se encontra no texto) como sinónimo de *intervelo centrado em...*. Os exemplos devem focar a existência ou inexistência de extremos e o facto de estes poderem ocorrer no interior ou nas extremidades do intervalo que constitui o domínio da função dada. O conteúdo dos factos 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4, simples mas fundamental, deve ser referido.

A noção de distância e a função módulo Usar a noção de distância na recta não deve oferecer dificuldades, uma vez que os alunos foram já confrontados com o uso de distâncias na situação mais geral do plano euclidiano. Uma das maneiras de motivar a definição de valor absoluto é referir a conveniência de medir distâncias de pontos da recta real à origem. O estudo da função $m|x-a|+p$ faz-se a partir do das (duas) funções afins que são restrições daquela. Com base nos princípios já estudados anteriormente vê-se que o gráfico tem simetria relativamente a um eixo vertical e que, se $m>0$, a função tem um mínimo absoluto com o valor p. O aluno deverá ficar a saber identificar os três parâmetros que definem a função cujo gráfico tenha a forma de "V", invertido ou não.

Mais sobre funções e gráficos. Transformações de gráficos As transformações estudadas nesta secção têm uma motivação geométrica muito nítida. Os alunos devem ser levados a trabalhar com a transformação analítica subjacente em casos simples relacionados com as poucas funções que conhecem (afins, $1/x$, x^2...) e devem ser confrontados com questões como: qual o efeito de uma transformação destas sobre eventuais raízes? e sobre o contradomínio? Uma translacção arbitrária de um gráfico pode considerar-se efeito de translacção horizontal seguida de vertical (ou vice-versa, já que as translacções comutam). Revisitar as funções $m(x-a)+p$ dando nomes às translacções envolvidas.

Funções quadráticas Ao iniciarmos este estudo pelas funções quadráticas com o vértice em evidência pretende-se por um lado tirar partido de conhecimentos anteriores, para reconhecer que toda a função quadrática resulta por translacção da função ax^2, e por outro caracterizar o vértice como ponto de extremo. Passando ao caso geral, é importante ensinar a técnica de completação do quadrado, recordar o fundamento da "fórmula resolvente" da equação do segundo grau e referir as principais propriedades das raizes. Os alunos deverão ficar a saber responder a questões simples como a determinação dos sinais das raizes de $x^2+8x-3=0$ ou $x^2+17x+4=0$, sem resolver a equação. A resolução de inequações que envolvem um trinómio do segundo grau deve ser compreendida com base num "quadro de sinais" ou no conhecimento do comportamento da função quadrática.

Sugerimos, embora não categoricamente, que o algoritmo da divisão seja abordado pelo método dos coeficientes indeterminados: é-se conduzido a um sistema linear de tipo especial em que as equações contêm, sucessivamente, apenas uma, duas, três,... incógnitas, sendo por isso imediata a resolução. Os alunos não devem perder de vista o significado do cociente e do resto, sendo para isso inevitável trabalhar com alguns exemplos de fracções racionais. A regra de Ruffini deve ser dominada. É útil chamar a atenção para casos em que o uso do algoritmo de divisão não se justifica, como em

$$\frac{x^2-3x+1}{2x}=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2x}$$

ou

$$\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{\frac{2}{3}(3x+1)-\frac{5}{3}}{3x+1}=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\frac{1}{3x+1}.$$

A propriedade que define a parábola em termos de foco e directriz deve ser mencionada, assim como a propriedade reflectora dos espelhos com secção parabólica.

Outras funções polinomiais Os alunos devem ficar a conhecer os gráficos de x^3 e x^4. Devem manipular alguns casos simples de decomposição em factores do primeiro grau e factores de sinal fixo, e apreender o significado analítico (e geométrico) de *raiz dupla, etc.* Devem saber resolver inequações polinomiais desde que lhes seja facultado o acesso à decomposição em factores. Seria desejável sensibilizá-los também para o que há a esperar do comportamento de um polinómio para valores grandes de $|x|$, tendo em atenção o sinal do coeficiente do termo de grau mais elevado. Deve sublinhar-se, a título de observação que será retomada mais tarde, no contexto das funções contínuas, que nos intervalos cujos extremos são raízes consecutivas ou $\pm\infty$ os polinómios mantêm o sinal.

Sobre exercícios e problemas O professor deve dar indicação sobre os diferentes graus de dificuldade dos problemas que propõe. A lista disponibilizada no texto tem valor indicativo e pode ser completada, pelo menos, com alguns exercícios que tenham como objectivo testar os aspectos mais simples dos conceitos e resultados estudados, bem como a capacidade de manejar algoritmos. O significado de fracção deve ser recordado sempre que venha a propósito, e pode propor-se a resolução de equações simples, que envolvam fracções, desde que conduzam a outras equivalentes tão simples como equações do primeiro ou do segundo grau; por exemplo

$$\frac{2}{x-5} = 7, \quad \frac{2}{x-5} = x.$$

Os dispositivos de cálculo numérico e gráfico automático devem ser utilizados em doses que a experiência e o bom senso aconselharão.

Lisboa, 3 de Fevereiro de 2002

Luís Sanchez