UNIVERSIDADE DE LISBOA

Faculdade de Ciências

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

10º ANO

LÓGICA MATEMÁTICA / GEOMETRIA
Prioridades e Objectivos

Armando Machado

2001

REANIMAT

Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Introdução à Lógica Matemática

Esta unidade tem como objectivos gerais o desenvolvimento da capacidade de entender de forma clara um enunciado matemático e da capacidade de comunicar de forma clara e sem ambiguidade num contexto matemático. Essas capacidades são essenciais, entre outras coisas, para poder desenvolver raciocínios matemáticos simples.

Pretende-se que o estudante reconheça os dois grandes tipos de expressões que intervêm na linguagem, os termos e as proposições, assim como as variantes destas em que intervêm variáveis, as expressões designatórias e proposicionais. Os exemplos de expressões designatórias poderão ser apoiados pela utilização de calculadoras programáveis e as expressões proposicionais poderão ser comparadas com as equações e sistemas de equações que o estudante já encontrou em anos anteriores. Relativamente às expressões proposicionais, é importante reconhecer o significado de uma tal expressão ser universal ou ser impossível, tal como reconhecer que estes dois casos não são exclusivos e que, em geral, uma tal expressão não é universal nem impossível.

Pretende-se que o estudante saiba reconhecer a forma como os conectivos lógicos permitem construir ou analisar proposições a partir de proposições mais simples e que saiba reconhecer o modo como o valor de verdade das proposições complexas se relaciona com os valores de verdade das proposições a partir das quais elas foram construídas (é dispensável a algebrização dessas relações por meio das clássicas tabelas de verdade). O caso mais delicado do conectivo de implicação poderá porventura ser tratado de forma mais intuitiva no quadro das expressões proposicionais, havendo vantagem em comparar e distinguir a interpretação da implicação como conectiva da sua interpretação em termos de causa/efeito. É especialmente importante que o estudante reconheça que os conectivos relacionam proposições e nunca termos.

Pela sua importância para o raciocínio matemático é importante que o estudante reconheça e interiorize perfeitamente as primeiras leis de de Morgan. No mesmo sentido, é importante que o estudante reconheça outras formas comuns de obter proposições com o mesmo valor de verdade que uma certa proposição, em particular as que envolvem a negação de uma implicação e a passagem ao contrarrecíproco.

Outro dos métodos que permitem obter proposições a partir de expressões mais simples é a utilização dos quantificadores universal e existencial. É importante que o estudante saiba reconhecer o papel destes quantificadores em expressões da linguagem correntemente utilizada em Matemática e que saiba relacionar o valor de verdade de uma proposição em que intervêm quantificadores com o comportamento da expressão proposicional que contribui para a sua formação. Pela importância, e pelo facto de clarificarem situações em que é frequente existirem ideias incorrectas nos estudantes, é importante reconhecer vários exemplos de aplicação das segundas leis de de Morgan.

Sem que se insista demasiado nisso, nem se multipliquem os exemplos, será importante examinar o que se passa com uma expressão proposicional com duas variáveis na qual se quantificou uma das variáveis, reparando que fica uma expressão proposicional com outra variável que pode ser subsituída de forma a obter proposições que podem ser verdadeiras ou falsas. Isso conduzirá ao exame do significado de algumas expressões simples envolvendo dois quantificadores.

Apesar de poder ser desejável terminar a unidade de lógica com o exame de alguns exemplos simples de raciocínios envolvendo contextos que o estudante já conhece, como o dos números reais ou inteiros, a limitação de tempo leva a que o exame de exemplos desses tipos de raciocínio possa ser deixado para o início da unidade de Geometria. Isso conduz a não examinar na aula, nesse momento, o conteúdo do texto de Lógica a partir do fim da página 16.

Incidência e paralelismo no quadro da Geometria do Espaço

Nesta primeira unidade de Geometria pretende-se, em primeiro lugar, que o estudante interiorize as ideias abstractas de ponto, recta e plano, relacionando-as e distinguindo-as das aproximações sensíveis constituídas por segmentos de recta e regiões limitadas dum plano. É importante que o estudante se habitue a manusear ou imaginar modelos manipuláveis, que podem ser simplesmente canetas e folhas de papel para apreciar intuitivamente o significado de afirmações, correctas ou incorrectas, que se podem fazer nestes contextos. É especialmente importante que o estudante resolva por si os exercícios 10 e 11, recorrendo à intuição e a situações manipuláveis. Estes exercícios, mesmo quando resolvidos apenas de forma intuitiva, podem apresentar vantagens na aprendizagem prática da Lógica por exigirem uma correcta interpretação dos enunciados e sublinharem o facto de um contra-exemplo particular ser suficiente para mostrar que uma afirmação geral não é válida. Outro dos conceitos lógicos importantes que a abordagem desta unidade pode contribuir para interiorizar é o de definição matemática (definição dos diferentes tipos de paralelismo, da noção de complanaridade, etc…). O estudo destas propriedades básicas da Geometria no Espaço pode também contribuir para o contacto com o quantificador de existência e unicidade, que não foi explicitamente estudado no texto de Introdução à Lógica Matemática. É importante que o estudante apreenda o que a existência e unicidade acrescenta à simples asserção da existência e que, nos exemplos, repare no partido que se pode tirar dela e do modo como se estabelece a sua ocorrência.

Apesar de a ênfase nesta unidade se situar especialmente nos aspectos intuitivos dos enunciados e de ser fundamental estimular a formação de imagens mentais que os apoiem, pode ser interessante habituar o estudante ao facto de muitos dos enunciados poderem ser justificados a partir de outras propriedades, mais facilmente aceites como intuitivas. Dentro das condicionantes de tempo seria importante que o estudante tomasse contacto com algumas das demonstrações dessas propriedades "menos intuitivas" e que começasse a compreender, através dos exemplos, certos métodos de demonstração muito importantes, como o método de redução ao absurdo, o método de passagem ao contra-recíproco e o método da hipótese alternativa.

Tendo em conta a limitação do tempo e o perigo de desmotivação de muitos estudantes, está fora de questão examinar na aula as demonstrações de todas as propriedades que aparecem no texto. A mensagem que é importante passar é que são as demonstrações aquilo que nos permite conhecer com mais segurança a validade de alguns enunciados e que mesmo as propriedades cuja demonstração não é examinada têm uma demonstração que pode ser estudada no caso de alguém assim o desejar. É importante que sejam feitos alguns exercícios em que o estudante seja levado a construir ele mesmo uma justificação, baseado nas propriedades cujo enunciado estudou. Como exemplo, pode-se propor a justificação do paralelismo entre arestas e faces do cubo ou entre faces deste, assim como a justificação do paralelismo entre o plano duma face e a diagonal da face oposta; outros exemplos do mesmo tipo ocorrem com outros sólidos geométricos conhecidos ou com secções determinadas nestes por planos.

Movimentos rígidos

O estudo elementar dos movimentos rígidos no plano e no espaço justifica-se pelo papel muito importante que jogam no nosso conhecimento sensível do espaço e por poderem contribuir de forma efectiva para uma compreensão mais simples de muitas propriedades geométricas. Os movimentos rígidos estão ligados intuitivamente à possibilidade de movermos para diferentes posições no espaço os objectos que nos são familiares, apesar de o movimento desses objectos ser apenas uma imagem parcial desses movimentos, no mesmo sentido que uma folha de papel é uma imagem parcial do plano que a

prolonga. A ideia importante, e intuitiva, a sublinhar é a da conservação das propriedades geométricas quando se efectua um movimento rígido.

A referência aos movimentos rígidos é um bom pretexto para introduzir a noção de transformação de um conjunto (correspondência biunívoca), facilitando o estudo, que é feito mais tarde, das funções reais de variável real. Em particular o estudante deverá perceber, apoiado em exemplos geométricos, a operação de composição entre transformações e descobrir o fenómeno da não comutatividade dessa operação. É também ocasião de referir a transformação identidade e o movimento rígido inverso de um dado movimento rígido, noções que, em conjunto com a de composição, ajudarão a perceber a razão de ser de certas operações envolvendo vectores.

Duas propriedades que é importante o estudante ser capaz de enunciar e perceber, a partir da sua experiência sensível, são o facto de um movimento rígido de um plano ficar determinado perfeitamente quando se conhecem as imagens de dois pontos distintos e o de um movimento rígido do espaço ficar determinado quando se conhecem as imagens de três pontos não colineares. Em cada um dos casos as imagens dos pontos que determinam o movimento rígido não são dadas arbitrariamente e as condições de existência de um movimento rígido devem ser relacionadas com os casos de igualdade (congruência) de triângulos que o estudante já conhece do Ensino Básico.

Como apoio à interiorização do papel dos movimentos rígidos do plano e do espaço, e apesar de isso não constituir um dos objectivos centrais do curriculum, pode ser interessante examinar o significado da regularidade de polígonos e de poliedros, assim como as formas de regularidade mais fraca existentes nos sólidos arquimedianos, ou noutras figuras geométricas, e que estão referidas no texto por intermédio do conceito de tipo de vértices, de arestas ou de faces. Para apoiar a intuição espacial é importante que o estudante tenha ocasião de manusear vários tipos interessantes de sólidos geométricos, podendo para isso construí-los a partir das respectivas planificações ou utilizar modelos existentes na Escola. O exame do que se passa ao nível do plano pode possivelmente ser facilitado com a utilização de papel ou acetato transparente que se faz mover sobre papel normal (os programas de Geometria Dinâmica não parecem ser de grande ajuda, por não ser fácil introduzir neles movimentos rígidos gerais).

Translações e Vectores

As translações aparecem como movimentos rígidos que têm a propriedade especial de não alterar as direcções das rectas nem os sentidos das semi-rectas. Duas propriedades das translações são especialmente importantes: O facto de uma translação, diferentemente do que acontece com um movimento rígido geral, ficar perfeitamente conhecida quando se conhece a imagem de um ponto particular e o facto de a composição de translações gozar da propriedade comutativa. As translações são utilizadas para apoiar o conceito de vector essencialmente por duas razões: Em primeiro lugar parece conceptualmente mais simples e menos artificial olhar para um vector como sendo uma translação do que como sendo uma classe de equivalência de segmentos orientados; em segundo lugar a definição da soma de vectores é mais natural quando associada à composição de transformações do que quando definida por uma regra do paralelogramo que não se percebe por que razão aparece. De qualquer modo, o estudante deverá acabar por ficar com o conhecimento interiorizado que um vector pode ser definido por uma "seta" e que duas "setas" definem o mesmo vector quando têm a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Depois de definidas a soma de vectores e a multiplicação de um vector por um número real, é importante que o estudante reconheça as propriedades destas operações e as propriedades geométricas que estão por detrás delas. Não se pretende que o estudante conheça as demonstrações de todas as propriedades, nem que tenha que perder tempo com o exame de todos os casos particulares que elas envolvem, mas é importante que ele ganhe consciência, eventualmente através de uma descoberta conduzida na aula, do que quer dizer geometricamente uma propriedade como a distributividade

$$a\,(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = a\,\overrightarrow{x} + a\,\overrightarrow{y}.$$

A ideia a passar é que as propriedades algébricas dos vectores não são algo que nos cai do céu mas apenas meios cómodos e fecundos de traduzir propriedades geométricas. Outra das ideias que é importante ser interiorizada é a de que as operações que envolvem os vectores permitem fazer com eles muito daquilo que se faz habitualmente com os números. O que é permitido e o que não é só pode ser reconhecido por uma análise das propriedades que se estão a aplicar. Pode ser instrutiva a resolução de problemas que envolvam equações ou sistemas de equações em que as incógnitas são vectores, reparando que o processo de resolução é muito semelhante ao utilizado no quadro análogo envolvendo números e aproveitando para rever, de forma crítica, as regras que se utilizam para resolver equações e sistemas de equações.

Este capítulo deverá constituir um primeiro passo em direcção à Geometria Analítica, que começará a ser estudada mais adiante. Espera-se que o estudante, para além de ser capaz de determinar gráficamente, com a ajuda de régua e esquadro (ou de programa de Geometria Dinâmica) somas de vectores e produtos de vectores por números reais, seja capaz de decompor vectores como combinações lineares de dois ou três vectores dados, conforme se esteja a trabalhar no plano ou no espaço (determinação aproximada dos coeficientes). Em situações que envolvem figuras geométricas conhecidas, os coeficientes exactos das combinações lineares poderão também ser determinados, o que é ocasião para uma revisão de assuntos estudados no ensino básico, como a trigonometria do triângulo rectângulo e o teorema de Pitágoras.

No fim desta unidade o estudante terá já interiorizado o modo de, fixado um referencial vectorial dum plano ou do espaço, associar a cada vector um par ou um triplo de números reais que o representa.

Perpendicularidade e ângulos na Geometria do Espaço

Partindo do que é bem conhecido sobre o ângulo de rectas e de semi-rectas na Geometria do Plano e, em particular, sobre as propriedades que envolvem a perpendicularidade, pretende-se com esta unidade que o estudante fique com ideias claras sobre as diferentes situações em que faz sentido falar de ângulos e de perpendicularidade na Geometria do Espaço.

O ângulo de duas rectas concorrentes não é verdadeiramente uma situação nova, uma vez que estas rectas existem num mesmo plano. De qualquer modo é interessante a realização de actividades em que se procura determinar o ângulo de rectas concorrentes determinadas por referência a certos sólidos geométricos, na medida em que isso obriga a visualizar o plano em que elas se encontram e a fazer eventualmente construções auxiliares sobre esse plano. A determinação deste tipo de ângulos é mais uma vez ocasião de revisão de conhecimentos que foram adquiridos no Ensino Básico. É também ocasião de estimular a utilização da calculadora científica para obter valores aproximados para os ângulos cuja determinação é procurada.

A fase seguinte, envolvendo a definição do que se deve entender por ângulo de duas rectas não concorrentes (ou semi-rectas com origens distintas) é a ocasião de chamar a atenção do estudante para um tipo de definição muito frequente em Matemática e que exige algum cuidado: O ângulo de duas rectas é, por definição, o ângulo de duas rectas paralelas àquelas que passem por um mesmo ponto, mas uma tal definição só é legítima porque, se utilizarmos outro ponto, o ângulo obtido é o mesmo. Este é um ponto importante que é necessário tornar claro. Conhecido o que é o ângulo de duas rectas no espaço fica também conhecido o que são rectas perpendiculares: são rectas que fazem um ângulo de 90°.

A propósito da perpendicularidade entre rectas, será importante relembrar o resultado conhecido desde o Ensino Básico que identifica o conjunto dos pontos dum plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta desse plano com a mediatriz desse segmento, isto é, a recta do plano perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio. Isso serve também de ocasião para colocar o mesmo problema no espaço e para chegar à conclusão de que o conjunto dos pontos do espaço equidistantes dos

extremos dum segmento, que se conclui facilmente ser a união de uma infinidade de rectas a passar pelo ponto médio do segmento é efectivamente um plano, a que se dá o nome de plano mediador. Não é fundamental que a demonstração desse facto seja abordada na aula, bastando que o estudante esteja consciente de que uma tal demonstração é possível (embora não seja simples) e que ele pode, se quiser, procurá-la ou tentar compreender a que é sugerida no texto. A discussão sobre o fenómeno do plano mediador pode levar à definição de recta perpendicular a um plano, como recta perpendicular a todas as rectas do plano e à propriedade fundamental que afirma que, para verificar que uma recta é perpendicular a um plano, basta encontrar duas rectas concorrentes do plano que sejam perpendiculares à recta. A esta e a outras propriedades envolvendo a perpendicularidade de rectas e planos aplica-se o mesmo que se disse a propósito do paralelismo e relações de incidência: Importa que os enunciados sejam conhecidos de modo preciso e sejam reconhecidos intuitivamente com o apoio de modelos simples facilmente manipuláveis. Não é importante que o estudante estude as demonstrações dessas propriedades (mesmo as que se são apresentadas no texto) salvo num caso ou noutro especialmente simples e enriquecedor; basta que o estudante tenha a consciência de que essas demonstrações existem e estão ao alcance de quem tenha a curiosidade de as procurar.

Pretende-se também que o estudante conheça o que se deve entender por ângulo de uma recta com um plano, passando pela noção de projecção da recta sobre o plano, e o que se deve entender por ângulo de dois planos. Estas noções servem de ocasião para propor a determinação de ângulos envolvendo sólidos geométricos conhecidos, o que é pretexto, mais uma vez, para a utilização de técnicas aprendidas no Ensino Básico.

Os problemas tratados ao longo desta unidade podem ser aproveitados para solicitar ao estudante o cálculo de áreas e volumes ligados a sólidos geométricos.

Aplicação à interpretação das perspectivas

Esta unidade constitui uma das aplicações mais efectivas à "vida real" do que esteve a ser estudado anteriormente. O estudante já encontrou ao longo da sua vida, e, em particular, através dos desenhos utilizados no texto, o fenómeno da perspectiva, isto é do desenho sobre um plano de uma figura que ao ser observada mimetiza, tão perfeitamente quanto possível, a observação de um objecto do espaço tridimensional. Os dois tipos de perspectiva são importantes e são encontrados com frequência na nossa observação do dia-a-dia. A perspectica autêntica é aquela que é apropriada para objectos que estão próximos ou que ocupam uma parte importante do nosso campo de visão. A perspectica cavaleira é uma aproximação satisfatória para objectos relativamente pequenos e não muito próximos de nós, em que a simplicidade do traçado é uma alternativa favorável aos pequenos desvios na representação. Pretende-se que o estudante descubra que, em qualquer das perspectivas, a colinearidade é conservada e que consiga tirar partido disso para completar certas representações em perspectiva. Pretenda-se também que o estudante constate e compreenda o fenómeno da convergência na representação de certas paralelas no caso da perspectiva exacta e que saiba tirar partido disso em problemas concretos. Pretende-se também que o estudante compreenda as propriedades fundamentais do comportamento métrico dos dois tipos de perspectivas, que inclui a noção de factor de escala de uma direcção no caso da perspectiva cavaleira e o "mau comportamento" do ponto médio no caso da perspectiva exacta. Seria talvez esta a ocasião mais indicada para solicitar ao estudante o desenho de certas secções em sólidos que lhes são desenhados em perspectiva, na medida em que ele estará agora mais alertado para o modo de desenhar certos segmentos de recta em perspectiva. O exame das questões ligadas à perspectiva poderá com vantagem ser apoiado em materiais manipuláveis convenientes.

Introdução à Geometria Analítica Plana

Os objectivos que se têm em mente nesta parte do estudo não se afastam muito dos que são apontados no programa oficial. Procura-se, no entanto, tirar partido do que já foi abordado quando se estudaram os vectores de forma a tornar clara a relação entre as coordenadas de um ponto e as coordenadas do correspondente vector de posição. Em particular, é importante tornar claro que fixar um referencial num plano ou no espaço é equivalente a fixar um referencial vectorial e uma origem. Apesar de no início se considerarem referenciais arbitrários, desde cedo que o estudo é limitado ao caso dos referenciais ortonormados, sendo importante que o estudante reconheça a razão por que isso é feito, nomeadamente o facto de o teorema de Pitágoras nos permitir calcular de maneira fácil o comprimento de um vector e a distância de dois pontos em termos das coordenadas envolvidas. É também importante que o estudante se aperceba de que, quando estuda um problema concreto, é conveniente colocar os eixos numa posição que simplifique a sua resolução, isto sem prejuizo de, quando não houver razões em contrário, se continuar a colocar os eixos na posição habitual (que pode apresentar vantagens do ponto de vista intuitivo).

A fim de tornar clara ao estudante a especificidade dos diferentes métodos de caracterizar conjuntos de pontos no quadro da Geometria Analítica, convirá recordar o que foi anteriormente aprendido sobre as definições de um conjunto em extensão e em compreensão, frizando as vantagens e as desvantagens de cada um destes métodos. Será então oportuno alertar o estudante, inclusive com exemplos exteriores à Geometria Analítica, da existência de um outro método de definir conjuntos, que ele possivelmente não encontrara em anos anteriores, e que é o método de definição paramétrica. Em particular é de salientar o paralelo entre este método e o de definição em extensão, em particular no que diz respeito às vantagens e desvantagens.

A definição em compreensão vai aparecer associada à caracterização de conjuntos dados como lugares geométricos e os exemplos disso no quadro do plano devem incluir pelo menos os apontados no programa, nomeadamente a mediatriz dum segmento de recta, a circunferência, como conjunto dos pontos a uma distância dada do seu centro, e o círculo. Outros exemplos poderão ser dados se o tempo o permitir, em particular o da parábola, como conjunto dos pontos equidistantes de um ponto e de uma recta dados. Tal como o programa oficial encoraja, são importantes os exemplos de outros conjuntos que podem ser definidos em compreensão, como as coroas circulares e as regiões do plano definidas a partir de rectas paralelas aos eixos coordenados.

A definição paramétrica é exemplificada no estudo daquilo a que se dá usualmente o nome de equação paramétrica da recta do plano, estudo que aparecerá naturalmente a partir do que já foi feito no momento em que se estudaram os vectores.

No sentido de levar o estudante a entender o modo como as diferentes definições podem ser utilizadas, parece formativo que o estudante descubra como determinar a intersecção de duas rectas quando ambas são determinadas em compreensão e quando uma é determinada em compreensão e a outra parametricamente. Havendo tempo, poderá também ser abordado o caso de duas rectas definidas parametricamente assim como intersecções que envolvam uma recta e outro tipo de conjuntos.

Tal como o programa oficial aponta, é importante que o estudante saiba determinar a equação reduzida de uma recta e reconheça o significado dos coeficientes que nela aparecem. Do mesmo modo, o estudante deverá saber obter as coordenadas do ponto médio de um segmento de recta a partir das coordenadas dos respectivos extremos.

Apesar de o programa oficial não o exigir explicitamente, parece ser formativo o estudo do modo como se transformam as caracterizações paramétricas e em compreensão de conjuntos quando estes são submetidos a certas transformações geométricas, como as translações e as homotetias centradas na origem do referencial. Esse estudo inclui como caso particular certas transformações que é tradicional fazer no quadro particular dos gráficos de funções, este último aparecendo com alguma frequência em exames do

décimo segundo ano, e poderá assim antecipar, sem aumento de dificuldade, o que deveria ser feito mais tarde. A transformação, menos habitual, em que se efectua um achatamento ou uma extensão limitados a um dos eixos pode ser motivada pelo que acontece no quadro da perspectiva cavaleira e ligar a caracterização da elipse como "circunferência achatada", referida no programa oficial, com a sua caracterização como perspectiva cavaleira de uma circunferência, mais ligada com a nossa experiência geométrica.

Introdução à Geometria Analítica no Espaço

O estudo da Geometria Analítica no Espaço durante o 10º ano é meramente introdutório. Como no caso da Geometria Analítica Plana, os referenciais são definidos por um referencial vectorial do espaço e por uma origem e tira-se partido do que já foi estudado anteriormente sobre a determinação das coordenadas de um vector do espaço, relativas a um referencial vectorial. Mais uma vez limita-se desde muito cedo o estudo ao caso dos referenciais ortonormados, de forma a poder utilizar o teorema de Pitágoras para determinar comprimentos de vectores e distâncias entre pontos a partir das respectivas coordenadas.

No sentido de procurar um maior domínio intuitivo da situação a três dimensões, o estudante deverá ser conduzido à obtenção de caracterizações paramétricas e em compreensão para as rectas paralelas aos eixos coordenados e para os planos paralelos aos planos coordenados.

Generalizando o que foi feito no caso da Geometria Analítica Plana, o estudande deverá ser levado a descobrir como obter as coordenadas do ponto médio de um segmento de recta, a equação do plano mediador de um tal segmento e a equação da uma superfície esférica com centro e raio dados.

Havendo tempo será interessante o estudante realizar que, também no quadro da Geometria Analítica do Espaço, é fácil resolver problemas envolvendo a intersecção de conjuntos, especialmente quando um deles está definido em compreensão e o outro é uma recta definida parametricamente.