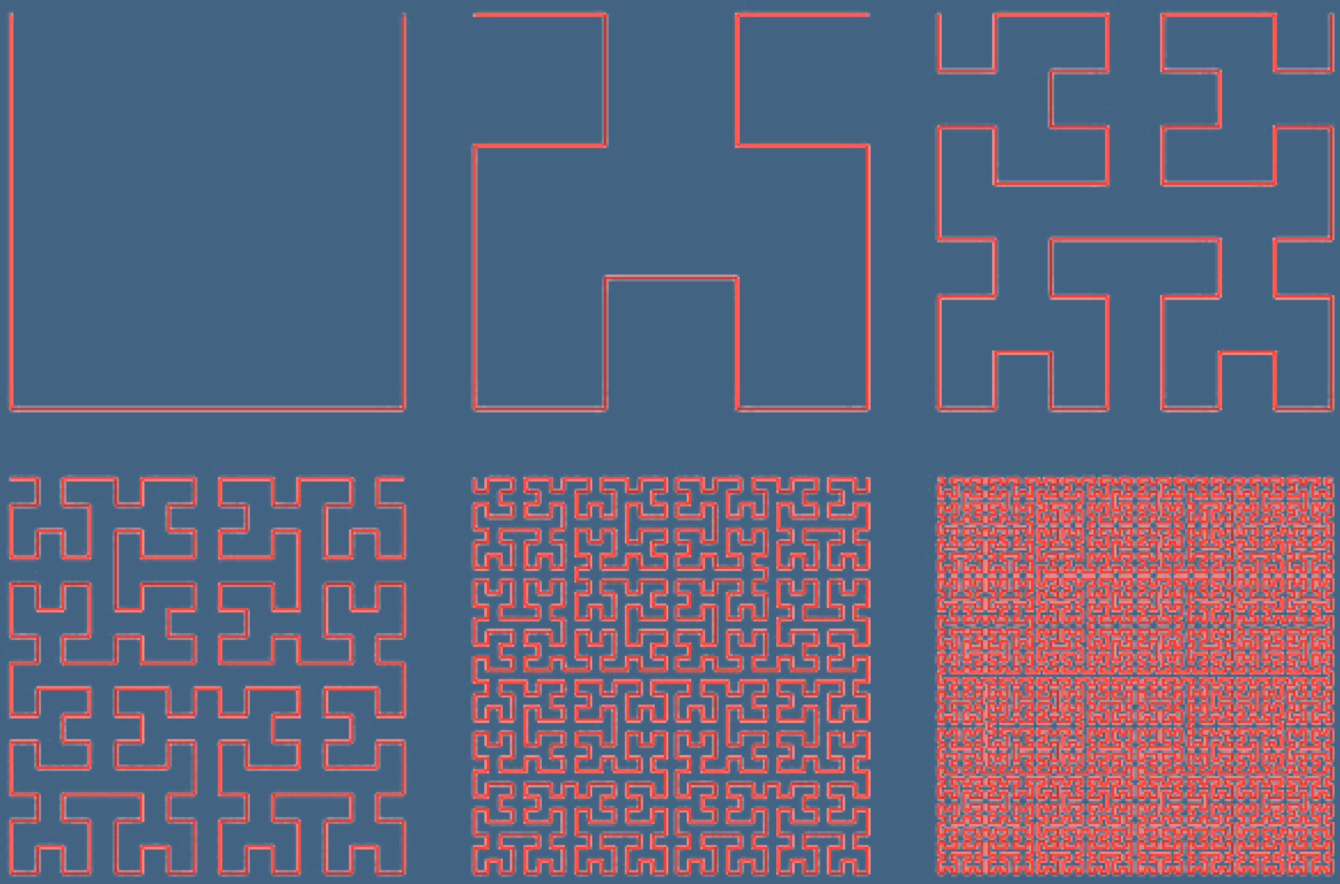
Cadernos de Ciência | Matemática

O infinito

“Une façon de parler”?

EDUARDO F. RÊGO



REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

FICHA TÉCNICA

Rev. Ciência Elem., V11(B)
doi.org/10.24927/rce2023.11A

Publicação trimestral
da Casa das Ciências
ISSN 2183-9697 (versão impressa)
ISSN 2183-1270 (versão online)
rce.casadasciencias.org

DEPÓSITO LEGAL
452636/19

TÍTULO
O infinito

AUTORIA, IMAGENS, DESIGN, CONCEÇÃO E PAGINAÇÃO
Eduardo F. Rêgo

NORMAS DE PUBLICAÇÃO NA RCE
A Revista de Ciência Elementar dirige-se a um público alargado de professores do ensino básico e secundário, aos estudantes de todos os níveis de ensino e a todos aqueles que se interessam pela Ciência. Discutirá conceitos numa linguagem elementar, mas sempre
com um rigor superior.

INFORMAÇÃO PARA AUTORES E REVISORES
Convidam-se todos os professores e investigadores a apresentarem os conceitos básicos do seu labor diário numa linguagem que a generalidade da população possa ler e compreender.
Para mais informação sobre o processo de submissão de artigos, consulte a página da revista em rce.casadasciencias.org

CASA DAS CIÊNCIAS
EDULOG · FUNDAÇÃO BELMIRO DE AZEVEDO

PROPRIETÁRIO
Casa das Ciências/ICETA
Faculdade de Ciências,
Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687
4169-007 Porto
rce@casadasciencias.org

Conteúdo

Nota biográfica sobre o autor

Eduardo Francisco Rêgo é professor aposentado do Departamento de Matemática da FCUP, onde se licenciou em Matemática Pura. Obteve os graus de M.Sc. e Ph.D. em Matemática pela Universidade de Warwick, Inglaterra. A sua área de formação pós-graduada e investigação é a Topologia com foco na topologia geométrica, variedades de dimensão 3, teoria de homotopia e espaços contrácteis.

Nos últimos dezoito anos tem-se dedicado primordialmente ao estudo de Filosofia – durante vários anos como membro do Instituto de Filosofia da FLUP, a quem está profundamente reconhecido pelo privilégio dessa imersão em ambiente profissional – naturalmente centrado em Filosofia da Matemática e com foco especial nos assuntos matemáticos mais directamente ligados à Lógica e Fundamentos.

Capítulo 1

Introdução

Este texto pode considerar-se como sendo de filosofia da matemática, mas pretende ser simples, de divulgação e acessível, pelo menos em grande parte[1], a não "especialistas". A tese central é que a *linguagem natural* usada para falar da Matemática, dos seus conceitos e resultados, mesmo em contextos técnicos (quer orais, quer escritos) é fundamental na própria construção e sedimentação de muitas das ideias e noções que a constituem. Para lá da linguagem matemática "propriamente dita", constituída por todos os seus formalismos simbólicos... Formalismos que do uso da linguagem natural também dependem para o entendimento dos seus significados e sentidos. A tese é que a linguagem natural cria, através do seu uso e repetições , certos *revestimentos semânticos* das ideias matemáticas, que estão para além dos sentidos que os formalismos só por si permitiriam determinar, mas que se constituem como sua parte integrante. A visão que cada um de nós tem da matemática contém como parte importante esses *"segundos sentidos"* que associamos a certos resultados matemáticos, ou mesmo teorias, e que como os planos de fundo numa paisagem, moldam a perspectiva que deles temos, em particular a profundidade do seu alcance. Mas muitos desses segundos sentidos não decorrem logicamente ou matematicamente dos resultados em si mesmos, são antes construídos por repetição sugestiva através da linguagem natural com que nos exprimimos sobre esses resultados, funcionando a repetição também como processo de institucionalização desses segundos sentidos na comunidade tornando-os correntes e revestindo-os de um carácter natural, quase necessário ou até óbvio - daí a expressão *revestimentos semânticos*.

O que faremos aqui, para ilustrar e explicar a tese, é analisar um pouco uma noção que não é exclusivamente matemática e que há muito é reconhecida como uma das grandes perplexidades da mente humana: a noção de *infinito*. Ou talvez devamos falar no plural: em *noções de infinito*. Debates filosóficos envolvendo essas noções , de forma mais ou menos

[1] Com excepção de uma única subsecção - "Declaração de interesses" filosóficos... - mas cujo conteúdo não é imprescindível para a compreensão do restante e que poderá ser saltada, e, sobretudo, de algumas notas de rodapé com conteúdos mais técnicos.

implícita como vistos do nosso ponto de vista actual, existem desde a Antiguidade, nomeadamente os que opunham as concepções de Aristóteles e Demócrito sobre a constituição do mundo físico e, associadamente, sobre a existência e características constitutivas do que hoje chamamos o *continuum*. Sucintamente, Demócrito era *atomista* e Aristóteles argumentava pela impossibilidade do continuum ser constituído por elementos indivisíveis (pontos)[2].

Apesar de poder ser visto como um texto de filosofia da matemática, uma motivação essencial para a sua escrita foi a nossa convicção de que abordar questões desta disciplina é também uma forma de *aprender matemática* e de desenvolver uma visão mais abrangente e integrada das suas múltiplas paisagens. Tendo presente esta ideia, que retomaremos nas notas finais, esperamos que o leitor possa enriquecer a sua visão e conhecimentos matemáticos, em especial através da abordagem - que tentámos tornar acessível - a certos resultados menos conhecidos, em particular no domínio da lógica e fundamentos.

O texto tem quatro secções . Na secção seguinte, após esta Introdução , reveremos algumas ideias básicas da matemática sobre o infinito, em particular explicando a ideia - que através da divulgação matemática é conhecida também por muitos não matemáticos - de que há infinitos de vários *tipos*, ou, como se costuma dizer mais frequentemente, de vários *tamanhos*[3]. Na terceira secção discutiremos a mencionada ideia dos *revestimentos semânticos* em volta de uma interrogação provocatória: *O infinito existe mesmo ou é apenas uma forma de falar, uma "façon de parler"?* A última secção contém as notas finais.

1.1 S, M, L, XL, XXL...

A noção mais simples de infinito aparece em matemática ligada à ideia de que a sucessão dos chamados *números naturais*, $0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$[4] que muito cedo aprendemos a "contar", não termina. Não termina nunca... É a ideia intuitiva, com que as crianças brincam por vezes em jogos e desafios de linguagem, que é sempre possível aumentar um conjunto, por maior que ele nos pareça, acrescentando-lhe novos elementos. "Um trilião de cem biliões de mil milhões de centenas de chocolates!". "Esses chocolates todos e mais um!". Na consciência que a disputa não tem fim, por vezes vem a formulação disso mesmo, por invocação da palavra mágica, *infinito*. "Infinitos chocolates!"... "E eu vou ter infinitos de infinitos chocolates!"... Tão grande quanto um número natural nos possa parecer, há sempre o *número seguinte* na ordem

[2]Os argumentos de Aristóteles, que não reproduziremos aqui, parecem indicar que a existência do infinito, mesmo o que mais à frente referiremos como *infinito potencial*, não seria sequer considerada por ele.

[3]Aqui está um exemplo de duas simples palavras, *tipos* e *tamanhos*, com cargas semânticas próprias que analisaremos no contexto do seu uso matemático (ou para-matemático)

[4]Não vou discutir a velha questão, muito discutida em grupos ligados ao ensino da matemática, se 0 é ou não um número natural! É apenas uma questão de convenção , que varia, com os necessários acertos para uso consistente das notações associadas!

natural daquela sucessão. A notação usual para designar o conjunto dos números naturais é $\mathbb{N}$. E em notação de teoria de conjuntos, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Note-se que na referência *ao* conjunto dos números naturais, assim com o artigo definido, e ao uso habitual e repetido desta notação da teoria dos conjuntos, com as reticências e as chavetas enclausurantes, fica de certo modo associada já a ideia do conjunto dos números naturais como uma *totalidade acabada, existente e completa,* e não só a ideia mais primitiva (?) de um tipo de processo recorrente que pode ser repetido indefinidamente: neste caso, o de podermos acrescentar sempre mais um elemento... Contar mais um número!

1.2 O Grande Hotel de Hilbert

Vamo-nos servir desta alegoria imaginada por Hilbert em 1924 para introduzirmos agora, de uma forma mais divertida, os aspectos técnicos mais elementares da matemática do infinito.

A alegoria consiste em imaginar que temos um hotel infinito, com quartos numerados a partir de 1, seguindo portanto a sequência natural dos números naturais. O número 0 deixámo-lo para a recepção do hotel[5]. A dada altura o hotel está cheio e entra na recepção um novo cliente a pedir um quarto. Um dos recepcionistas diz-lhe logo que lamenta mas não há quartos vagos, que o hotel está lotado, mas logo o outro recepcionista retorque que não há problema porque facilmente se pode resolver a situação . E explica: só temos que pedir a cada hóspede para se mudar para o quarto com o número a seguir ao daquele em que agora está. Libertamos assim o quarto número 1 que fica para o novo hóspede. E assim ficou resolvido o problema. A técnica foi sendo aplicada sempre que chegavam hóspedes novos, até uma altura em que os hóspedes começaram a queixar-se das constantes mudanças de quarto. E um número infinito de hóspedes a queixar-se ao mesmo tempo preocupou naturalmente o gerente do hotel que foi à recepção dar ordens para não aceitarem novos hóspedes. Mas o mesmo recepcionista disse-lhe que não se preocupasse porque havia outra solução fácil: bastava que cada hóspede mudasse para o quarto cujo número é o dobro do número do quarto em que agora está! O do número 1 muda para o quarto 2, o do 2 muda para o 4, o do 3 para o 6, o do 4 para o 8, etc. Ficam assim ocupados todos os quartos com número par e ficam libertos todos os quartos com número ímpar: um número infinito de quartos vazios para poder acolher um número infinito de novos hóspedes!

Neste processo está revelado um método simples para construir uma *correspondência biunívoca* entre o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, e o conjunto dos *números inteiros*, que se designa por $\mathbb{Z}$, e que consta de todos os naturais mais os seus negativos: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. *Correspondência biunívoca* significa que associamos a cada elemento de cada um dos conjuntos um e um só elemento do outro conjunto. Este tipo de

[5] Cá está uma vantagem de considerarmos o número 0!

correspondência define o que em matemática chamamos *funções bijectivas* entre conjuntos.

Uma função entre dois conjuntos, em notação $f : X \longrightarrow Y$, é uma correspondência que associa a cada elemento do conjunto X um e um só elemento do conjunto Y. Em notação , a cada $x \in X$ ($\in$ é o símbolo para pertença), associamos um elemento $y \in Y$, dito a imagem de x pela função $\dot{f}$ e escrevemos $y = f(x)$. O conjunto X é chamado o *domínio* da função e o conjunto Y o *conjunto de chegada*. Uma função é *injectiva* se elementos distintos têm imagens distintas e é *sobrejectiva* se qualquer elemento de Y é imagem de algum elemento de X. Uma função é *bijectiva*, define uma correspondência biunívoca, se é injectiva e sobrejectiva. Neste caso existe a *função inversa*, em notação $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, que é também bijectiva.

Podemos então construir uma função bijectiva $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ do seguinte modo: cada número natural $n \in \mathbb{N}$ é enviado no seu dobro $f(n) = 2n$; note-se que 0 (a recepção de hotel) é enviado em si mesmo. Quanto aos inteiros negativos vão ocupar, por ordem, os espaços (deixados vagos na alegoria do hotel) dos naturais ímpares: -1 vai para 1, -2 vai para 3, -3 vai para 5, -4 para 7, -5 para 9, etc. Podemos descrever facilmente o processo: multiplicamos cada inteiro negativo por -2 (o produto de dois números negativos é positivo) e subtraímos depois 1, ou seja, se $z < 0$, $f(z) = -2z - 1$.

Claro que podemos dizer que $\mathbb{Z}$ tem *mais elementos* do que $\mathbb{N}$. Tem todos os elementos deste mais todos os negativos: tem portanto *muito mais elementos* do que $\mathbb{N}$, na verdade um número infinito deles! É *muito maior*, é mesmo *infinitamente maior* do que $\mathbb{N}$. Mas, por outro lado, a existência de uma bijecção entre dois conjuntos, como acabámos de ver que existe neste caso, também dá sentido à ideia de que os conjuntos têm *o mesmo número de elementos*. É assim que fazemos e dizemos quando no caso de conjuntos finitos contamos os elementos de dois conjuntos e chegamos ao mesmo número natural n: estamos implicitamente a construir uma bijecção entre eles, pondo-os aos dois em correspondência biunívoca com o mesmo *subconjunto* de $\mathbb{N}$: $\{1, 2, 3, ..., n\} \subset \mathbb{N}$ ($\subset$ é o sinal de *inclusão* de um conjunto noutro).

Dizemos que um conjunto X é *numerável* se ele é *finito* ou se existe uma bijecção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Neste caso dizemos que X é *infinito numerável*. Aquela bijecção dá-nos uma forma de numerar, seguindo a ordem natural de $\mathbb{N}$, os elementos de X: se designarmos a imagem de um número natural n por $f(n) = x_n$, podemos escrever $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$. Acabámos de ver que $\mathbb{Z}$ é numerável.

Uma propriedade evidente que importa realçar é a seguinte: **Qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ é numerável**!

Isto é consequência óbvia da ordem natural de $\mathbb{N}$ e do facto intuitivo de que, nessa ordem, qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ tem um primeiro elemento (o menor dos seus elementos). Assim, podemos numerar qualquer subconjunto escolhendo o seu primeiro elemento para ser x_0, passando depois para o segundo, que é o primeiro dos restantes, e fazendo-o x_1, etc. Ou